

# Funktionsmodelle von Kondensatoren

Dr. sc. nat. HANS-DIETER LANGER

Mitteilung aus der Sektion Physik/Elektronische Bauelemente der TU Karl-Marx-Stadt

Das erreichte Niveau der (rechnergestützten) Netzwerkanalyse, ohne die die Entwicklung und Weiterentwicklung technisch-ökonomisch optimierter Schaltkreise heute undenkbar ist, erfordert auch die Verfügbarkeit „gut angepaßter“ Modelle der Bauelementefunktionen von Kondensatoren. Dabei hat man sich entsprechend dem geforderten Schaltkreisbetriebszustand mit einigen systemtheoretisch differenzierten Funktionsgrundtypen auseinanderzusetzen. Ohne auf Vollständigkeit bedacht zu sein, lassen sich die Belastungsfälle von Kondensatoren folgendermaßen unterscheiden:

- aperiodische bzw. analoge Erregung
  - Einschaltvorgänge (z.B. Integrierkondensatoren, kapazitive Sensoren)
  - Ausschaltvorgänge (z.B. Schweißenergie-Kondensatoren, Blitzelektrolytkondensatoren)
  - Gleichvorgänge (z.B. Pufferkondensatoren)
- periodische Erregung
  - harmonische bzw. sinusförmige Vorgänge (z.B. Filterkondensatoren, Koppelkondensatoren)
  - impulsförmige bzw. nichtsinusförmige Vorgänge (z.B. Impulskondensatoren).

Die Ein- und Ausschaltvorgänge, die man auch unter dem Begriff Ausgleichsvorgänge zusammenfaßt, sind ebenso wie Gleichvorgänge (z. B. Reststrom eines mit Gleichstrom vorbelasteten Elektrolytkondensators) zweckmäßig im Zeitbereich zu analysieren. Bestimmte Gleichspannungs- bzw. nichtsinusförmige periodische Erregungsfälle wird man im Zeit- oder Frequenzbereich analysieren, während die übrigen periodischen Erregungen am besten durch das Wechselstrom-Kleinsignalverhalten interpretiert werden.

Den Anwender von Chipkondensatoren interessieren hauptsächlich die elektrischen Charakteristika der Bauelemente. Für die rechnergestützte Netzwerkanalyse von Schaltkreisen sowie für die Erzeugnisweiterentwicklung werden zunehmend verbesserte Funktionsmodelle der Kondensatoren benötigt. Anhand der harmonischen Kleinsignalanalyse werden in diesem Beitrag die Grundlagen diskutiert.

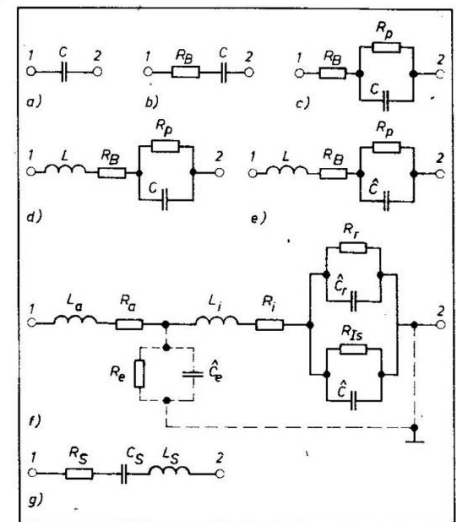
Im folgenden sollen einfache Modellgrundlagen der Kleinsignalanalyse mit sinusförmiger Erregung diskutiert und zugleich die notwendigen Wege zu deren Verfeinerung aufgezeigt werden. Auf dieser Grundlage wird man außer Gemeinsamkeiten auch die typischen Unterschiede bedrahteter und unbedrahteter Kondensatorbauformen herausarbeiten können.

## Ersatzschaltungen mit lokalisierten Parametern

Zur harmonischen Kleinsignal-Frequenzanalyse von Kondensatoren stehen im wesentlichen drei Betrachtungsweisen zur Verfügung. Die einfachste und am weitesten verbreitete ist die der lokalisierten (bzw. konzentrierten) Parameter. Hauptsächlich intuitiv werden die Parameter, die den realen Kondensator im betrachteten Frequenzbereich erfahrungsgemäß ausmachen, zu einer mehr oder weniger vollständig berechenbaren Ersatzschaltung zusammengestellt. Bild 1 zeigt dazu Modellbeispiele, die, ausgehend von der idealen Kapazität  $C$ , eine zunehmende Komplexität aufweisen. Die realen Parameter berücksichtigen dabei die elektrischen und magnetischen Energieverluste bzw. Wirkungen. Sie entstehen beim Stromdurchfluß der zwischen den Klemmen 1 und 2 befindlichen Zuleitungen, Kontaktverbindungen, Elektroden und Dielektrika. Ferner wird ein Teil der elektrischen Energie durch dielektrische Polarisationsverluste verbraucht. Schließlich sind die strominduzierten (Lade-, Entlade-, Verschiebungsstrom) Magnetfelder zu beachten, die zu einer Gesamtinduktivität bzw. in Teilinduktivitäten der Zuleitungen und des eigentlichen Kondensatorkörpers (Scheibe, Stapel, Wik-

kel, poröser Formkörper) berücksichtigt werden.

Man faßt zweckmäßig alle Partialwiderstände, die der Lade- bzw. Entladestrom zu überwinden hat, im Bahnwiderstand  $R_B$  zu-



**Bild 1:** Schaltzeichen und einfache Ersatzschaltungen des Kondensators. a) Ideale Kapazität; b) Berücksichtigung des Verlustwiderstandes der Zuleitungen und Elektrodenbeläge; c) zusätzliche Berücksichtigung des Verlustwiderstandes der Isolation (bzw. des Reststromes) im Dielektrikum; d) zusätzliche Berücksichtigung der Selbstinduktivitäten (und Gegeninduktivitäten) der Anschlußelemente und des aktiven Kondensatorkörpers; e) zusätzliche Berücksichtigung der dielektrischen Verluste; f) Unterscheidung nach äußeren und inneren Induktivitäten bzw. Bahn- und Kontaktwiderständen und zusätzliche Berücksichtigung der realen Rand- und Erdkapazitäten; g) einfachste RCL-Serienschaltung

sammen. Der Parallelwiderstand  $R_p$  ist als Isolationswiderstand  $R_{is}$  des Dielektrikums aufzufassen. In der komplexen Kapazität  $\hat{C}$  wird mit

$$\hat{C} = C(1 - j \tan \delta_e) \quad (1)$$

definitionsgemäß der dielektrische Verlustfaktor  $\tan \delta_e$  eingeführt, was mit der Einführung einer komplexen Dielektrizitätskonstante identisch ist. Nach Bild 1e werden L und  $R_B$  seriell in äußere (Index a) und innere Komponenten (Index i) aufgespalten, um die Zuleitungs- und die Anteile des Kondensatorkörpers auseinanderzuhalten. Die Ersatzschaltung enthält darüber hinaus die nach den Indizes e bzw. r unterschiedenen komplexen Kapazitäten und ihre jeweiligen Parallelwiderstände, die den entsprechenden Kriechströmen zuzuordnen sind.

Der Index e steht für die parasitäre Kapazität des an seinen Klemmen 1 und 2 auf beliebigem Potential liegenden Kondensators (z. B. des Gehäuses gegen Erdpotential), und r kennzeichnet die unvermeidliche Streufeldkapazität an den Elektrodenrändern. Mit den im Bild 1 gezeigten Ersatzschaltungen lassen sich wesentliche Merkmale der Frequenzcharakteristik von Kondensatoren qualitativ darstellen, ohne daß man bereits Unterschiede zwischen Kondensatorarten macht.

Dies soll anhand der Ersatzschaltung nach Bild 1e gezeigt werden. Für die komplexe Impedanz erhält man

$$\hat{Z} = R_B + \frac{1}{\hat{Y}_C} + j\omega L \quad (2)$$

mit dem komplexen Leitwert

$$\hat{Y}_C = \frac{1}{R_p} + j\omega \hat{C} \quad (3)$$

bzw. wegen Gl. (1)

$$\hat{Y}_C = \frac{1}{R_p} + \omega C \tan \delta_e + j\omega C \quad (4)$$

Damit geht Gl. (2) über in

$$\hat{Z} = \frac{R_B [(1 + \omega C R_p \tan \delta_e)^2 + (\omega C R_p)^2]}{n} + \frac{R_p (1 + \omega C R_p \tan \delta_e)}{n} - \frac{\omega C R_p^2 - \omega L [(1 + \omega C R_p \tan \delta_e)^2 + (\omega C R_p)^2]}{n} \quad (5)$$

$$n = (1 + \omega C R_p \tan \delta_e)^2 + (\omega C R_p)^2$$

Dieser Ausdruck ist exakt im Rahmen des gewählten Modells und bei Rechnerauswertung kein Problem. (Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß der Vergleich mit Meßwerten nicht anhand der für die Rechnung nützlichen komplexen Zahlen, sondern der Beträge erfolgt.)

Zur übersichtlicheren manuellen Auswertung von Gl. (5) transformiert man die Schaltung nach Bild 1e in die einfachste Serienerersatzschaltung (Bild 1g), für die

$$\hat{Z}_S = R_S + \frac{1}{j\omega C_S} + j\omega L_S \quad (6)$$

bzw.

$$Z_S = \sqrt{R_S^2 + \left(\omega L_S - \frac{1}{\omega C_S}\right)^2} \quad (7)$$

gelten. Ohne im einzelnen auf die mit S indizierten Serienerersatzgrößen eingehen zu müssen, liefert Gl. (7) den im Bild 2 dargestellten qualitativen  $Z_S$ -f-Verlauf mit der Resonanzfrequenz

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi \sqrt{C_S L_S}} \quad (8)$$

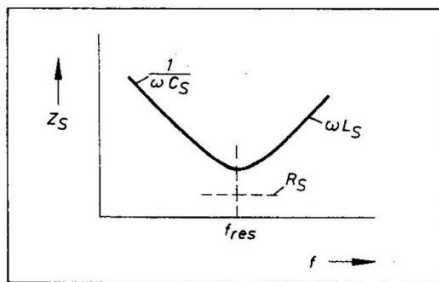


Bild 2: Frequenzabhängigkeit der Impedanz der Ersatzschaltung nach Bild 1g

Der normale Betriebsbereich eines Kondensators beschränkt sich demnach auf den Bereich  $f < f_{res}$  (kapazitiver Bereich).

Ein wichtiges Einsatzkriterium lautet

$$R_S \ll \frac{1}{\omega C_S} \quad (9)$$

Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf diesen kapazitiven Bereich (d. h., es gelten die Kriterien nach Gl. (9) und  $\omega L_S \ll 1/\omega C_S$  bzw.  $\omega L \ll 1/\omega C$ ), so folgt aus

$$\hat{Z}_S \approx \hat{Z} \quad (10)$$

unter Verwendung von

$$\tan \delta_S = \frac{\text{Re} \hat{Z}}{\text{Im} \hat{Z}} = \omega C_S R_S \quad (11)$$

$$R_S = R_B \left\{ 1 + \frac{\tan \delta_p + \tan \delta_e}{\tan \delta_B [1 + (\tan \delta_p + \tan \delta_e)^2]} \right\} \quad (12)$$

$$C_S = C [1 + (\tan \delta_e + \tan \delta_p)^2] \quad (13)$$

und mit Hilfe der gewöhnlich eingehaltenen Kriterien  $R_p \gg R_B$  und  $\tan \delta_e \ll 1$

$$\tan \delta_S \approx \tan \delta_B + \tan \delta_p + \tan \delta_e \quad (14)$$

Der Serienverlustfaktor  $\tan \delta_S$  enthält hier nur noch den Bahnverlustfaktor

$$\tan \delta_B = \omega C R_B \quad (15)$$

den Parallelverlustfaktor

$$\tan \delta_p = \frac{1}{\omega C R_p} \quad (16)$$

und den dielektrischen Verlustfaktor.

Im Bild 3 sind die Frequenzcharakteristika der Gln. (12) bis (14) dargestellt. Am auffälligsten sind die Abnahmen von  $C_S$ ,  $R_S$  auf einen konstanten Endwert mit steigender Frequenz und das Minimum von  $\tan \delta_S$ .

### Ersatzschaltungen mit verteilten Parametern

Die Beschreibung mit lokalisierten Parametern hat sich für niedrige Frequenzen als ausreichend erwiesen.

Im Bereich höherer Frequenzen, die aber im allgemeinen noch unterhalb der Resonanzfrequenz liegen, treten jedoch spürbare qualitative Abweichungen von der Messung auf [1]. Insbesondere fehlen die Charakteristika, die eine kritische Frequenz markieren. Wesentlich ist in diesem Zusammenhang die Erkenntnis, daß bei diesen höheren Frequen-

zen die räumlich-differentielle Parameterverteilung im Kondensator entscheidend seine Funktion bestimmt.

Wie Bild 4 zeigt, beschreibt das (eindimensionale) Modell der verteilten Parameter den Kondensator bei niedrigen Frequenzen qualitativ ebenso gut wie das Modell der lokalisierten Parameter (vergl. Bild 3). Die kritische Frequenz  $f_{krit}$  (sie wird hier in Übereinstimmung mit dem Experiment durch den Übergang der Serienerersatzkapazität von einem ausgeprägten Plateaubereich in einen abfallenden Ast festgelegt) findet man jedoch nur beim Modell der verteilten Parameter, dessen theoretische Grundlagen nachfolgend am eindimensionalen Beispiel erläutert werden.

Man teilt den eindimensionalen Kondensator in Elementarzellen der Länge  $\Delta x$ . Sie enthalten das aus infinitesimalen Elementen, z. B.  $\Delta R_B$  und  $\Delta \hat{C}$  in der im Bild 4 gewählten Struktur, bestehende Ersatzschaltungsnetzwerk. Eingang und Ausgang des im Bild 4 dargestellten Kondensators befinden sich bei  $x = 0$ . Der eindimensionale Kondensator erstreckt sich bis zu  $x = L$ . Nun werden auf die Elementarzelle die Maschenregel und der Knotensatz angewandt. Man erhält

$$\hat{U}(x) = \hat{U}(x + \Delta x) = \Delta R_B \hat{I}(x) \quad (17)$$

$$\hat{I}(x) = \hat{I}(x + \Delta x) + \hat{I}_C(x + \Delta x) \quad (18)$$

Mit den Ansätzen

$$\Delta R_B = \rho_B \Delta x \quad (19)$$

$$\Delta \hat{C} = \hat{c} \Delta x$$

wird der auf die Längeneinheit bezogene spezifische Widerstand der Elektroden  $\rho_B$  bzw. der entsprechende komplexe Kapazitätsbelag  $\hat{c}$  eingeführt. Da der Scheinwiderstand der Kapazität

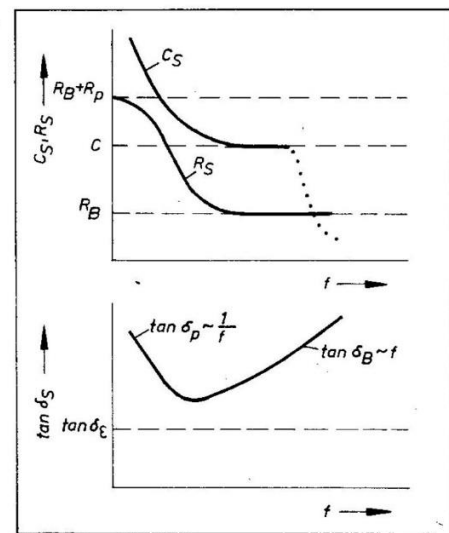
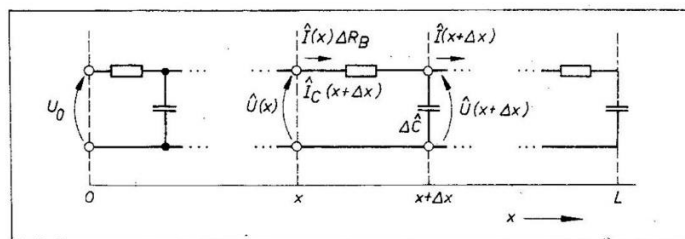


Bild 3: Frequenzabhängigkeit der Serienerersatzgrößen gemäß Bild 1b der im Bild 1c dargestellten Ersatzschaltung (Die punktierte Kurve entspricht in qualitativer Übereinstimmung mit dem Experiment dem  $C_S$ (f)-Verlauf bei Berechnung nach dem Modell der verteilten Parameter)

Bild 4: Netzwerk eines Kondensators mit eindimensionaler Parameterverteilung und Lage des Koordinatensystems



$$\Delta \hat{Z}_c = \frac{1}{j\omega \hat{C}} \quad (21)$$

und damit der Strom über den Kondensator durch

$$\hat{I}_c(x + \Delta x) = \frac{\hat{U}(x + \Delta x)}{\Delta \hat{Z}_c} = j\omega \Delta \hat{C} \hat{U}(x + \Delta x) \quad (22)$$

gegeben ist, sind die Ströme und Spannungen in den Gln. (17), (18) ebenfalls komplex. Führt man nach Einsatz der Gln. (19), (20) und (22) in die Gln. (17) und (18) den Grenzübergang durch, so erhält man die Differentialgleichungen

$$\frac{d\hat{U}}{dx} = \rho \hat{I} \\ - \frac{d\hat{I}}{dx} = j\omega \hat{C} \hat{U} \quad (23)$$

Daraus folgt nach nochmaliger Differentiation

$$\frac{d^2 \hat{U}}{dx^2} - \lambda^2 \hat{U} = 0 \\ \lambda^2 = j\omega \hat{C} \rho \quad (24)$$

Die Differentialgleichung (24) mit den konkreten Randbedingungen bei  $x = 0$  bzw.  $x = L$  (z. B.  $\hat{U}(0) = U_0$  und  $\hat{I}(L) = 0$ ) liefert die räumliche Potentialverteilung  $\hat{U}(x)$  im Kondensator.

Um zur Eingangsimpedanz  $\hat{Z}_e$  und den daraus folgenden Bauelementparametern zu kommen, benötigt man den bei  $x = 0$  in den Kondensator fließenden Strom  $\hat{I}(0) = \hat{I}_e$ , der bei bekannter Spannung  $\hat{U}(0) = U_0$

$$\hat{Z}_e = \frac{U_0}{\hat{I}_e} \quad (25)$$

liefert.

Die Serienschaltungsgrößen erhält man durch den Ansatz

$$\hat{Z}_e = R_s + \frac{1}{j\omega C_s} \quad (26)$$

wobei auch hier Gl. (11) gilt, und ferner

$$|\hat{Z}_e| \equiv Z_e = \sqrt{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}} \quad (27)$$

Nicht immer gelingt die Trennung der Real- und Imaginärteile bei Gleichsetzen der Gln. (25) und (26), weshalb man auf Näherungsausdrücke für kleine und große Frequenzen zurückgreifen muß. Es ist notwendig, an dieser Stelle darauf hinzuweisen, daß die Rechnung mit verteilten Parametern nur den „inneren“ Teil (also im Sinne „innerhalb der Randbedingungen“) des Kondensators erfaßt. Man ergänzt das Modell bei Bedarf mit lokalisierten äußeren Parametern (z. B. Serienschaltung von Bahnwiderstand und Induktivität der Anschlußdrähte), so daß letztlich mit einer zweckmäßigen Mischung zwischen verteilten und lokalisierten Ersatzgrößen die beste qualitative Übereinstimmung mit dem Verhalten des realen Kondensators erzielt wird.

### Kontinuumstheoretisches Modell

Physikalisch reizvoll ist die Betrachtung eines Kondensators als Raum-Zeit-Kontinuum, das sich auf die Verteilungen der Ladungen und deren Beweglichkeiten im elektromagnetischen Feld zurückführen läßt. Im Prinzip steckt der Kontinuumscharakter auf Grund der infinitesimalen Zellenabmessungen bereits im Modell der verteilten Parameter. Allerdings steht dem u. a. die intuitive

Herangehensweise bei der Festlegung der elektromagnetischen Zellenparameter entgegen.

Viel allgemeiner ist es, wenn man als Ausgangspunkt eine effektive Kapazitätsdichte  $c$  (sie entspricht der Ladungsverteilung) und einen effektiven spezifischen Widerstand  $\rho$  der Bahnkomponenten des Kondensatormediums wählt, die beide orts- und zeitabhängig sein können:  $c = c(\vec{r}, t)$ ,  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ . Nach Maxwell gilt für die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  bzw. die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  bei gegebener Ladungsdichteverteilung  $\vec{q} = q(\vec{r}, t)$  und Stromdichteverteilung  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$

$$\text{div } \vec{D} = q \quad (28)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \quad (29)$$

Daraus folgt der Ladungserhaltungssatz

$$\dot{q} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (30)$$

Beschränkt man sich auf das stationäre Strömungsfeld, d. h., die Zeitableitung der magnetischen Induktion  $B$  ist vernachlässigbar klein, so bewegt man sich im Rahmen der Theorie praktisch im Bereich unterhalb der Resonanzfrequenz. Das ist zur Darlegung des Wesens der Kontinuumsvorstellung zweckmäßig und für viele Anwendungsfälle ausreichend.

$\vec{B} \approx 0$  hat zur Folge, daß das elektrische Feld  $\vec{E}$  ein Potential  $U$  besitzt:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad } U(\vec{r}, t) \quad (31)$$

Mit dem ohmschen Gesetz

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (32)$$

und der Definitionsgleichung für die Kapazitätsdichte

$$c = \frac{q}{U} \quad (33)$$

folgt bei (vereinfachend) zeitunabhängigem  $c$  aus Gl. (30)

$$\Delta U - \frac{1}{\rho} \text{grad } \rho \text{ grad } U = \rho c \dot{U} \quad (34)$$

Mit dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung wird im Rahmen der gewählten Voraussetzungen ein beliebiger dreidimensionaler Kondensator beschrieben. Der spezielle Charakter, der die geome-

trisch unterschiedlich ausgeführten Kondensatorarten und -bauformen ausmacht, tritt außer in den effektiven Parametern  $c$  und  $\rho$  und ihren raumzeitlichen Besonderheiten erst durch Wahl der Randbedingung hervor:

$$U_{\text{Rand}} = U(\vec{r}) \quad (35)$$

Man wird zweckmäßig mit komplexen Größen  $\rho$  bzw.  $c$  (z. B. Einführung einer komplexen Dielektrizitätskonstante) arbeiten. Bei periodischer Erregung wird Gl. (34) wegen

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) \exp(j\omega t) \quad (36)$$

in

$$\Delta U - \frac{1}{\rho} \text{grad } \rho \text{ grad } U - j\omega \rho c U = 0 \quad (37)$$

überführt, worin man, abgesehen vom mittleren Term, die Gleichung (24) wiedererkennt. Sie ist somit als Sonderfall in Gl. (37) enthalten.

Zur Bewertung der Leistungsfähigkeit der Kontinuumstheorie bei Kondensatoren sei auf [1] [2] verwiesen. Dort werden auch die möglichen Ansätze für die effektiven Parameter des Kontinuums sowie notwendige Kompromisse diskutiert, um zu technisch verwertbaren Lösungen zu kommen.

Auf jeden Fall ist das dreidimensionale Kontinuumsmodell das am besten geeignete Mittel, um physikalisch begründet den Schritt von der qualitativen zur quantitativen Simulation der Bauelementefunktion von Kondensatoren zu vollziehen.

### Literatur

- [1] Langer, H.-D.: Festkörperelektrolytkondensatoren. Berlin: Akademie-Verlag 1982
- [2] Langer, H.-D.; Döring, H.-U.: Mehrdimensionale Behandlung der Bauelementefunktion von Elektrolytkondensatoren mit poröser Anode. Nachrichtentechnik · Elektronik, Berlin 33 (1983) 3, S. 168–171