

Modellierung der Induktivität von Festelektrolyt- kondensatoren

A. Fröhlich, H.-D. Langer TH Karl-Marx-Stadt
H.-U. Döring VEB Elektronische Bauelemente Teltow

1. Problemstellung

In /1/ und den darin zitierten Veröffentlichungen werden die frequenzabhängigen Eigenschaften von Kondensatoren theoretisch untersucht, wobei jedoch die Induktivität des inneren Kondensatorkörpers unvollständig bzw. nicht berücksichtigt wird. Das ist im Bereich niedriger Frequenzen vertretbar. Zum besseren Verständnis des Verhaltens bei höheren Frequenzen, z. B. oberhalb der Resonanzfrequenz, und zur besseren quantitativen Anpassung an die reale Impedanz des Kondensators ist die induktive Komponente zu beachten. Es soll daher ein Beitrag zur Induktivitätsberechnung von Kondensatoren anhand eines speziellen Modells geleistet werden.

2. Modellrechnung

Der Kondensator mit zylindrischer Anode (axialer, durchgängiger Anodendraht; Katodenkontakt nur an Mantelfläche) wird als ein Stück Koaxialkabel aufgefaßt, dessen geometrische Daten aus Bild 1 hervorgehen.

Zur Impedanzberechnung wird die Leitungstheorie angewendet. Bild 2 zeigt das Zellenmodell (verteilte Parameter). Die eingeführten Parameter haben folgende Bedeutung:

$$R_k' = \frac{\rho_{AG}}{\pi[(d_{AG} + r_i)^2 - r_i^2]}$$

auf die Länge bezogener Widerstand
der Leitsilberkontaktierung
(ρ_{AG} spezifischer Widerstand des
Leitsilbers)

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_i}{r_d} \quad \text{auf die Länge bezogene Induktivität}$$

(μ_0 Permeabilitätskonstante)

$$R'_S = \frac{\rho_{\text{eff}}}{2\pi} \ln \frac{r_i}{r_d} \quad \text{effektiver Widerstand des Sinterkörpers}$$

zwischen den Radien r_d nach

r_i
(ρ_{eff} effektiver spezifischer Widerstand des porösen Sintergerüsts)

$$C' = \frac{C_{\text{ges}}}{l} \quad \text{auf die Länge bezogene Kapazität}$$

(C_{ges} Gesamtkapazität)

$$R'_D = R_{\text{isol}} \cdot l \quad \text{mit der Länge multiplizierter Isolationswiderstand des Dielektrikums}$$

Es wird mit komplexen Größen gerechnet (s. Bild 3):

$$Y' = \left[\frac{j\omega C_{\text{ges}}(j + \tan \delta_\epsilon) + \frac{1}{R_{\text{isol}} l}}{1} \right]^{-1} + \frac{\rho_{\text{eff}}}{2\pi} \ln \frac{r_i}{r_d} \quad (1)$$

$$Z' = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_i}{r_d} + \frac{\rho_{\text{AG}}}{\pi d_{\text{AG}}(2r_i + d_{\text{AG}})} \quad (2)$$

Dabei ist $\tan \delta_\epsilon$ der Verlustfaktor des Dielektrikums.
Es gilt nach Bild 3

$$u(z+dz) = u(z) - Z' i(z) \quad (3)$$

$$i(z+dz) = i(z) - Y' u(z+dz) \quad (4)$$

Daraus ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dz} = -Z' i \quad (5)$$

$$\text{und } \frac{di}{dz} = -Y' u. \quad (6)$$

Durch Differenzieren von (6) nach z und Einsetzen in (5) erhält man

$$\frac{d^2 i}{dz^2} = Y' Z' i. \quad (7)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$i = A \sinh(az) + B \cosh(az) \quad (8)$$

mit

$$a^2 = Y' Z'. \quad (9)$$

Die Randbedingungen lauten

$$i(0) = i_0 \quad (10)$$

und

$$i(l) = 0. \quad (11)$$

Aus (10) folgt

$$B = i_0 \quad (12)$$

und aus (11) und (12)

$$0 = A \sinh(al) + i_0 \cosh(al) \quad (13)$$

$$A = -i_0 \coth(al). \quad (14)$$

Einsetzen von (12) und (14) in (8) ergibt:

$$i = i_0 [-\sinh(az) \coth(al) + \cosh(az)] \quad (15)$$

$$\frac{di}{dz} = i_0 a [-\cosh(az) \coth(al) + \sinh(az)]. \quad (16)$$

Wenn man (16) in (6) einsetzt, erhält man

$$-Y' u = i_0 a [-\cosh(az) \coth(al) + \sinh(az)]. \quad (17)$$

Jetzt kann man $Z_{\text{ges}} = \frac{u(0)}{i(0)}$ aus (15) und (17) berechnen:

$$Z_{\text{ges}} = \frac{1}{Y'} \frac{i_0 a [-\cosh(0) \coth(al) + \sinh(0)]}{i_0 [-\sinh(0) \coth(al) + \cosh(0)]}, \quad (18)$$

d.h.,

$$Z_{\text{ges}} = \frac{a}{Y} \coth(al), \quad (19)$$

Aus (19) und (9) ergibt sich dann:

$$Z_{\text{ges}} = \frac{Z'}{Y'} \coth(1 Y' Z'). \quad (20)$$

Z_{ges} ist die komplexe Impedanz des Kondensators, aus der man mit (1) und (2) die in Tabelle 1 angegebenen Zahlenwerte erhält (s. auch Bild 4). Aus /2/ wurde dazu die folgende Beziehung entnommen:

$$\coth(x+jy) = \frac{\sinh(2x) - j\sin(2y)}{\cosh(2x) - \cos(2y)} \quad (21)$$

Dem Beispiel liegen folgende Daten zugrunde:

$l=1,0 \text{ cm}$, $r_i=0,3 \text{ cm}$, $d_{\text{Ag}}=5 \text{ } \mu\text{m}$, $\rho_{\text{Ag}}=0,64 \text{ } \Omega\text{mm}^2\text{m}^{-1}$, $r_d=0,3 \text{ mm}$,

$\rho_{\text{eff}}=2 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega\text{cm}$, $\tan \delta_{\text{e}}=10^{-2}$, $R_{\text{isol}}=100 \text{ M}\Omega$, $C_{\text{ges}}=100 \text{ } \mu\text{F}$.

Wie man sieht, trägt das Bauelement oberhalb der Resonanzfrequenz $f_{\text{res}} \approx 10^6 \text{ Hz}$ induktiven Charakter.

Faßt man den Kondensator ersatzweise z.B. als Serienschaltung von Widerstand R_S , Kapazität C_S und Induktivität L_S auf, so gilt

$$Z_{\text{ges}} = R_S + j\omega L_S + \frac{1}{j\omega C_S}, \quad (22)$$

und man kann über (20) L_S bestimmen. Dazu ist (20) in die Form

$$Z_{\text{ges}} = A + j\omega B + \frac{1}{j\omega D} \quad (23)$$

zu bringen. Der Koeffizientenvergleich zwischen (22) und (23) in Verbindung mit Dimensionsbetrachtungen liefert die gesuchte Serieninduktivität. Die Aufspaltung und Ordnung nach (23) der komplexen Funktion in (20) wird durch Reihenentwicklung und Abbruch nach betragsmäßig kleinen Gliedern (Mitnahme imaginärer Terme!) erleichtert bzw. erst möglich.

4. Literatur

- /1/ Langer, H.-D.: Festkörperelektrolytkondensatoren, Akademie-Verlag, Berlin (1982)
 /2/ Bartsch, H.-J.: Mathematische Formeln, Fachbuch-Verlag, Leipzig (1984)

Tabelle 1: Aus Z_{ges} abgeleitete Parameter

f	Z_{ges}	$\text{Re}(Z_{\text{ges}})$	$\text{Im}(Z_{\text{ges}})$
Hz	Ω	Ω	Ω
10	159	$1,62 \text{ m}\Omega$	-159
20	79,5	826	-79,6
50	31,8	348	-31,8
100	15,9	189	-15,9
200	7,96	110	-7,96
500	3,18	61,8	-3,18
kHz			
1	1,59	45,9	-1,59
	$\text{m}\Omega$		$\text{m}\Omega$
2	797	37,9	-796
5	320	33,1	-319
10	163	31,5	-160
20	86,2	30,5	-80,6
50	44,9	29,2	-34,1
100	33,1	27,2	-18,9
200	26,9	24,9	-10,1
500	23,6	23,4	-2,50
MHz			
1	23,5	23,4	2,11
2	25,6	24,4	7,50
5	34,3	29,3	17,8
10	46,7	36,9	28,6
20	65,4	49,1	43,2
50	103	74,7	71,0
100	146	104	102
200	206	147	145
500	326	231	230
GHz			
1	461	326	325

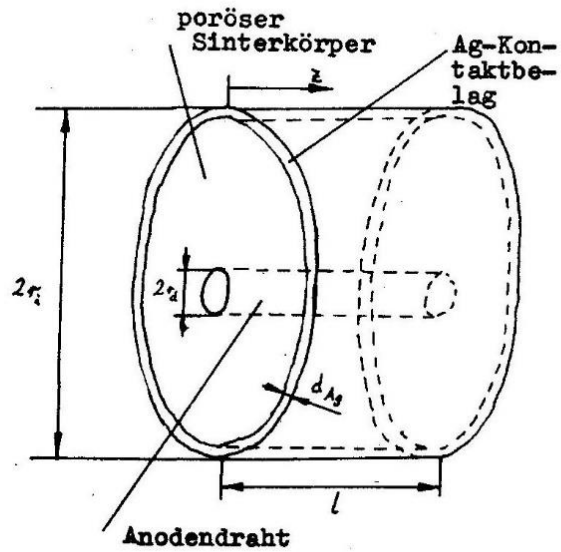


Bild 1: Geometrie und Kontaktierung einer zylindrischen Modellanode

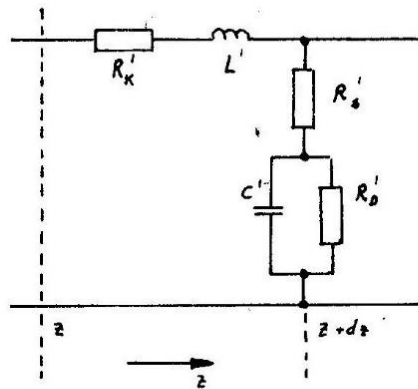


Bild 2: Zellenmodell der Koaxialleitung

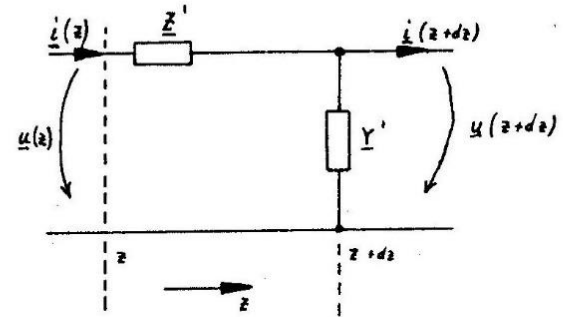


Bild 3: Vereinfachte Ersatzschaltung (s. Bild 2)

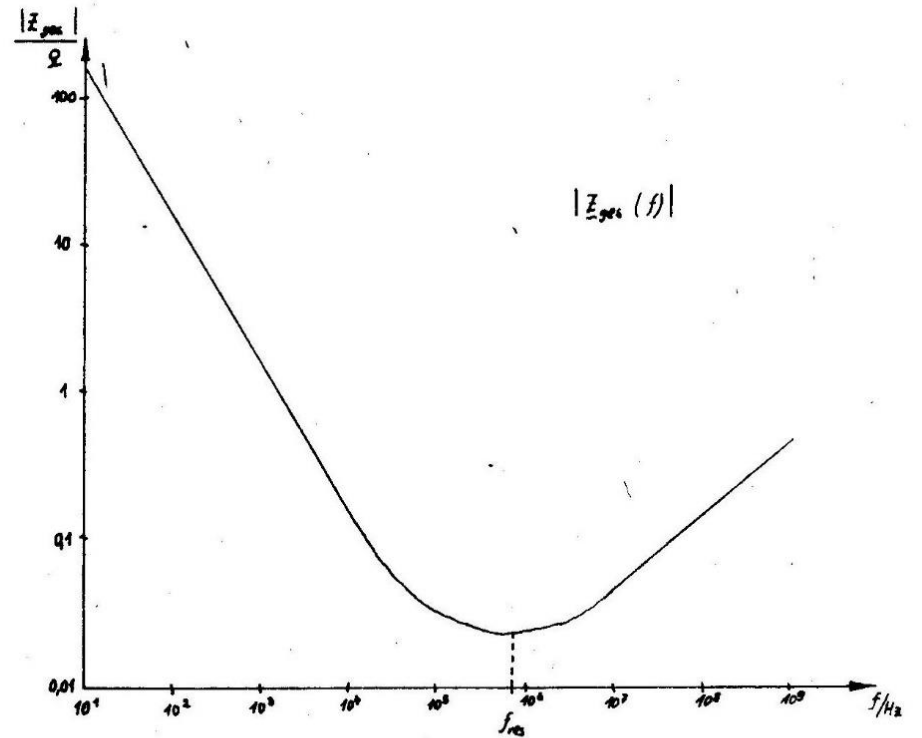


Bild 4: Impedanz des Kondensators in Abhängigkeit von der Frequenz