

## ZUM PROBLEM DER KRITISCHEN FREQUENZ VON KONDENSATOREN

Doz. Dr. sc. H.-D. Langer,  
TH Karl-Marx-Stadt, Sektion Physik/ Elektronische Bauelemente;  
Dipl. Math. H.-U. Döring,  
VEB Elektronische Bauelemente Teltow

### Problemstellung

Da der Betriebsfrequenzbereich von Kondensatoren in zunehmendem Maße in den HF-Bereich verschoben wird, ist es notwendig, die HF-Eigenschaften theoretisch richtig zu beschreiben. Eine sehr wichtige Größe in diesem Zusammenhang ist die sogenannte kritische Frequenz  $f_{\text{krit}}$ , oberhalb derer die Kapazität des Kondensators auf sehr geringe Werte abfällt. Experimentelle und theoretische Untersuchungen /1/-/7/ zu den frequenzabhängigen Eigenschaften der Kondensatorparameter, wie Impedanz, Kapazität, Widerstand, Verlustfaktor, zeigen, daß die Bauelementefunktion durch die Modelle mit lokalisierten Parametern im Bereich relativ niedriger Frequenzen ausreichend beschrieben wird. Für den Fall höherer Frequenzen versagen sie jedoch. Das soll die nachstehende, vereinfachte Ersatzschaltung eines Kondensators in Abb. 1 verdeutlichen.

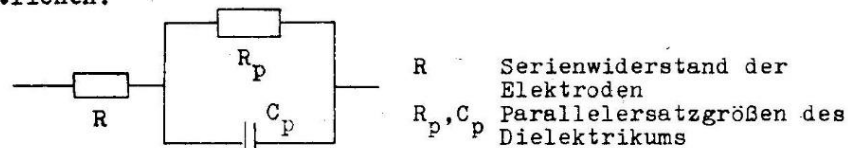


Abb. 1 Ersatzschaltung eines Kondensators

Es läßt sich die frequenzabhängige Serieneratzkapazität angeben

$$C_S = \frac{1 + (\omega C_p R_p)^2}{\omega^2 C_p R_p^2} \quad (1)$$

Den qualitativen Frequenzverlauf der Serieneratzkapazität nach der Gleichung (1) im Vergleich mit dem experimentellen Verlauf zeigt die Abb. 2. Man sieht, daß der Abfall der Kapazität oberhalb von  $f_{\text{krit}}$  durch das angegebene Modell, das in der Literatur auch heute noch sehr häufig verwendet wird, nicht gut approximiert wird.

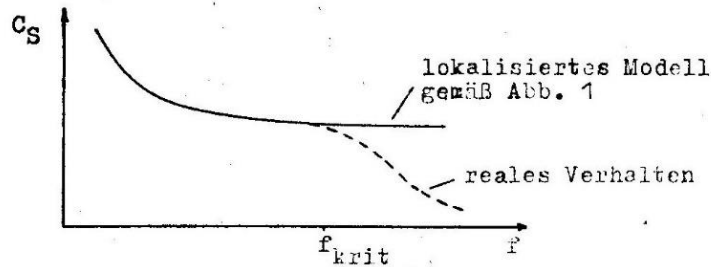


Abb. 2 Vergleich von  $C_S$  nach lokalisiertem Modell mit realem Verhalten.

Dem gegenüber erweist sich, daß die Behandlung des Kondensators als eindimensionales Modell mit verteilten resistiven, kapazitiven und induktiven Parametern die experimentellen frequenzabhängigen C-Kurven qualitativ richtig widerspiegelt, z.B. für Sinteranoden /8/-/10/, für Wickelkondensatoren mit Glattfolie /11/, für Wickelkondensatoren mit geätzter Al-Folie /4/, /12/. Dadurch ist es möglich, ein Verfahren anzugeben, das die kritische Frequenz  $f_{krit}$  auf analytischen bzw. numerischen Wege liefert.

Eine allgemeinere dreidimensionale Betrachtung von Elektrolytkondensatoren mit poröser Sinteranode im Rahmen einer Kontinuums-theorie zeigt eine bessere Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund /6/, /7/, da z.B. die tatsächliche Geometrie des Kondensatorelementes und die Art und Weise seiner Kontaktierung eingeht /13/, /14/. Ebenso wie im 1D-Modell ist hier die kritische Frequenz angebar.

Im folgenden soll dies an Hand eines zylindrischen Elektrolytkondensators mit poröser Sinteranode verdeutlicht werden, wobei vermerkt werden soll, daß das Verfahren auch auf andere Kondensatortypen, z.B. Wickelkondensatoren; Dünnschichtkondensatoren, siehe /15/; eutektische Metall-Halbleiter-Kondensatoren, siehe /16/, angewandt werden kann.

#### Modellrechnung

Ausgangspunkt der nachfolgenden Betrachtungen ist die Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0, \quad (2)$$

wobei  $\rho$  die Ladungsdichte und  $\vec{J}$  die Stromdichte des Kondensator-kontinuums bedeuten. Es wird nun der Fall des stationären Strömungsfeldes, d.h.  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$  ( $\vec{B}$  Vektor der magnetischen Induktion), vorausgesetzt. Damit besitzt das elektrische Feld  $\vec{E}$  ein Potential  $U$ , wobei gilt

$$\vec{E} = -\text{grad } U. \quad (3)$$

Das Kontinuum besitze als effektives Medium die effektiven Materialgrößen Kapazitätsdichte  $c$ , die durch

$$q = cU \quad (4)$$

definiert ist, und die elektrische Leitfähigkeit  $\kappa$ , wobei das OHMsche Gesetz

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \quad (5)$$

gelten möge. Die angeführten Größen sind im allgemeinen Fall komplex sowie zeit- und ortsabhängig.

Bei zeitunabhängigem  $c$  und ortsunabhängigem  $\kappa$  ergibt das Einsetzen von (3)-(5) in (2) die folgende Differentialgleichung

$$\Delta U = \rho c \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (6)$$

in der  $\rho = 1/\kappa$  den effektiven spezifischen elektrischen Widerstand des Elektrodenmaterials und  $\Delta$  den LAPLACE - Operator bedeuten. Für eine sinusförmige Spannungsabhängigkeit

$$U = U(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (7)$$

hat man für das komplexe Potential  $U(\vec{r})$

$$\Delta U(\vec{r}) = i\omega \rho c U(\vec{r}), \quad (8)$$

mit  $\vec{r}$  als Ortsvektor.

Das Potential  $U$  nimmt auf dem Kondensatorrand auf Grund der Kontaktierung vorgegebene Werte an. Für den vorliegenden Fall genügt es, als Randbedingung

$$U|_{\text{Rand}} = U_0 = \text{const.} \quad (9)$$

anzusetzen.

Für den erwähnten zylindersymmetrischen Festelektrolytkondensator mit der Höhe  $H$  und Radius  $R$  lautet das Randwertproblem (8), (9) in Zylinderkoordinaten

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = iw\varrho c U, \quad (10)$$

$$U(R) = U_0,$$

wobei der Anschaulichkeit halber nur die  $r$  - Abhängigkeit von  $U$  betrachtet wird. Für die Charakterisierung der Bauelementefunktion ist die komplexe Eingangsimpedanz

$$Z = \frac{U_0}{I} \quad (11)$$

von Interesse. Hierin ist allgemein

$$I = \int_A \vec{J} \vec{dA} \quad (12)$$

der komplexe Strom, der durch den Kondensatorrand  $A$  fließt. Für den vorliegenden Fall gilt

$$J(r) = -\frac{1}{\varrho} \frac{dU}{dr} \quad (13)$$

Das Randwertproblem (10) kann analytisch gelöst werden, und es ist

$$Z = \frac{1}{2\pi RH} \sqrt{\frac{i\varrho}{wc}} \frac{J_0(Ri\sqrt{iw\varrho c})}{J_1(Ri\sqrt{iw\varrho c})}, \quad (14)$$

worin  $J_0$  und  $J_1$  Besselfunktionen bedeuten. Wird als Abkürzung

$$\alpha = R^2 w \varrho c \quad (15)$$

eingeführt und die Besselfunktionen in der Form

$$J_n(i\sqrt{i\alpha}) = M_n(\sqrt{\alpha}) e^{i\theta_n(\sqrt{\alpha})} \quad (16)$$

dargestellt, so läßt sich Gleichung (14) umschreiben zu

$$Z = \frac{1}{2\pi RH} \sqrt{\frac{\varrho}{wc}} \frac{M_0(\sqrt{\alpha})}{M_1(\sqrt{\alpha})} e^{i(\pi/4 + \theta_0(\sqrt{\alpha}) - \theta_1(\sqrt{\alpha}))} \quad (17)$$

Für  $\alpha$  - Werte kleiner eins, z.B. für kleine Frequenzen, ergibt sich aus (17)

$$Z_0 = \frac{\varrho}{8\pi H} - i \frac{1}{w\pi R^2 H c} \quad (18)$$

womit sich die Serieneratzkapazität  $C_0$  angeben läßt

$$C_0 = \pi R^2 H c, \quad (19)$$

d.h.  $C_0$  kann man als Nennkapazität des Kondensators auffassen. Somit kann aus (17) und (19) die reduzierte Serieneratzkapazität  $C_S/C_0$  aufgeschrieben werden:

$$\frac{C_S}{C_0} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \frac{M_1(\sqrt{\alpha})}{M_0(\sqrt{\alpha})} \operatorname{cosec}(\theta_0(\sqrt{\alpha}) - \theta_1(\sqrt{\alpha}) + \pi/4). \quad (20)$$

Bemerkenswert ist, daß sich die reduzierte Kapazität mittels Gleichung (20) auf einen einzigen Parameter  $\alpha$  zurückführen läßt, der sowohl Werkstoff- und Geometriegrößen als auch die Frequenz enthält. Die Definition des Kontinuumparameters  $\alpha$  nach (15) besagt, daß die Größen  $R^2$ ,  $w$ ,  $\varrho$  und  $c$  völlig gleichberechtigt die Kapazitätseigenschaften beeinflussen. Die Funktion  $C_S/C_0$  ist in Abhängigkeit von  $\alpha$  in Abb. 3 dargestellt, woraus zu erkennen ist, daß die reduzierte Serieneratzkapazität für  $\alpha > 10$  mit  $\sqrt{1/\alpha}$  abfällt.

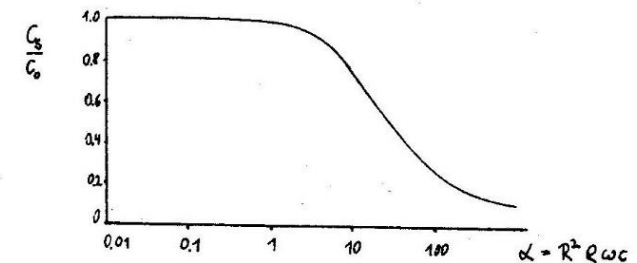


Abb.3 Abhängigkeit von  $C_S/C_0$  von  $\alpha$

Das erlaubt die Definition eines kritischen Wertes  $\alpha_{\text{krit}}$ , oberhalb dessen  $C_S/C_0$  auf sehr kleine Werte absinkt. Aus (15) kann somit auf die kritische Frequenz  $f_{\text{krit}}$  geschlossen werden:

$$f_{\text{krit}} = \frac{\alpha_{\text{krit}}}{2\pi R^2 \varrho c} \quad (21)$$

Im folgenden Abschnitt sollen an Hand des obigen Modells unterschiedliche Möglichkeiten der Festlegung von  $\alpha_{\text{krit}}$  und somit von  $f_{\text{krit}}$  aufgezeigt werden. Dabei werden die Werkstoff- und

Geometriegrößen als konstant angesehen.

Definition von  $f_{krit}$

Eine Möglichkeit der Definition von  $\alpha_{krit}$ , ist derjenige Wert  $\alpha$ , bei dem die reduzierte Serienerstkapazität  $C_S/C_0$  nach Abb. 3 auf 0,85 abgesunken ist. Dies ist eine etwas willkürliche Festlegung, für die Praxis aber recht bequeme Methode. Die kritische Frequenz ist dann nach Gleichung (21) zu bestimmen.

Eine weitere Möglichkeit ist die folgende. Wird die Gleichung (20) im doppelt logarithmischen Maßstab aufgetragen, so ergibt sich für große  $\alpha$ -Werte eine Gerade mit dem Anstieg  $-1/2$ . Wird an diese Kurve eine Gerade gelegt, so schneidet sie die Plateaulinie  $C_S/C_0 = 1$ . Die Abszisse des Schnittpunktes sei  $\alpha_{krit}$ . Die Bestimmung von  $f_{krit}$  nach diesem Verfahren ist ebenso ohne größere Probleme möglich. An dieser Stelle sei die typische Abhängigkeit von  $w_{krit} = 2\pi f_{krit}$  nach der zweiten Festlegung von den Werkstoff- und Geometriegrößen für den Fall des zylindersymmetrischen Festelektrolytkondensators mit poröser Sinteranode (dreidimensionale Betrachtung), dargestellt in Abb. 4, angeführt /13/.

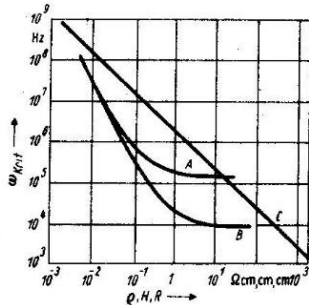


Abb. 4: Grafische Darstellung von  $w_{krit}$  in Abhängigkeit von  $Q, H$  und  $R$   
 Kurve A  $w_{krit} = w_{krit}(H)$ ,  
 Kurve B  $w_{krit} = w_{krit}(R)$ ,  
 Kurve C  $w_{krit} = w_{krit}(Q)$ ;  
 Die entsprechenden anderen Parameter sind jeweils konstant.

Abschließend sei noch auf eine weitere Definitionsmöglichkeit von  $\alpha_{krit}$  eingegangen, die man als näherungsweise analytisch bezeichnen kann. Ausgehend von der Gleichung (20) für  $C_S/C_0$  werden Näherungsausdrücke für bestimmte  $\alpha$ -Bereiche abgeleitet, aus denen dann in geeigneter Weise  $\alpha_{krit}$  festgelegt werden kann. Die genaue Vorgehensweise ist in /6/ ausführlich beschrieben.

Schlußfolgerung

Die kritische Frequenz  $f_{krit}$ , oberhalb derer die Kapazität stark abfällt, ist ein wichtiger Bauelementeparameter von Kondensatoren,

der bisher in Standards bzw. in Prospekten zu wenig berücksichtigt wurde. Die Überlegungen in diesem Beitrag geben Aufschluß darüber, daß  $f_{krit}$  eine universelle Größe von Kondensatoren ist, die zwar am Festelektrolytkondensator konkret behandelt, aber aus den allgemeingültigen MAXWELLSchen Feldgleichungen hergeleitet wird. Andererseits existiert ein Anwendungstrend zu höheren Frequenzen (z.B. Elektrolytkondensatoren für Schaltnetzteile) bzw. es erschließen sich zunehmend Sortimente von Kondensatoren den HF-Bereich, die früher vorzugsweise dem NF-Bereich zuzuordnen waren. Dies trifft vor allem auf Chipkondensatoren zu. In der theoretischen und experimentellen Forschung ist daher dem wichtigen Parameter  $f_{krit}$  eine größere Aufmerksamkeit zu schenken, um konstruktiv dieser Größe Rechnung zu tragen und nicht zuletzt in Vorbereitung auf eine Einführung dieser Größe in die Datenblätter der Kondensatorhersteller.

Literatur

- /1/ R.S. Vincent, Proc. IEE, 109B (Suppl. #22), 1962, S. 548
- /2/ I.F.M. Walker, "Radio & Electronic Components", Jan. 1963, S.25 - 28
- /3/ H.D. Hazzard, Sprague Tech. Paper No. 62-7, 1962, S. 3-6
- /4/ R.H. Broadbent, Electrochem. Technol. 6(5-6) 1968, S.163-166
- /5/ L.L. Odinez, L.A. Prochorova, S.S. Cekmasova, Elektronnaja Technika 2, 1972, S.77
- /6/ H.-D. Langer, Dissertation B, TH Karl-Marx-Stadt 1978
- /7/ H.-D. Langer, Festkörperelektrolytkondensatoren, Akademie-Verlag, Berlin 1982
- /8/ J. Vergnolle, J. Electrochem. Soc. 111, 1964, S.799-804
- /9/ P.L. Bourgault, J. Batelaan, Proc. Electron. Comp. Conf. 1968, S.38-43
- /10/ A.R. Morley, Proc. IEE, 117(8)1970, S.1648-1654
- /11/ R.M. Peekema, J.P. Beesley, Electrochem. Technol. 6(5-6)1968 S.166-172
- /12/ T. Yamamoto, Y. Yamamoto, H. Nishida, K. Yasuhara, Memoirs of the School of Engineering Okayama University, 12, Feb. 1978, S.29-36
- /13/ H.-U. Döring, H.-D. Langer, Nachrichtentechnik/Elektronik 33(4)1983, S.168-171
- /14/ H.-U. Döring, Unveröffentlichte Ergebnisse, TH Karl-Marx-stadt, 1983
- /15/ F. Blaschta, J. Mai, A. Schönfelder, E. Kreyßig, Dieser Berichtsband, S.106
- /16/ U. Bröhl, Dissertation A, TH Karl-Marx-Stadt 1984