



Mathematische
Gesellschaft
der
Deutschen
Demokratischen
Republik

Mitteilungen

Heft 1 / 1980

Inhaltsverzeichnis

	Seite
W. Fratzscher Untersuchungen zum Kaltbandwalzen mit Schmierung	5
W. Kremp Zur Lösung eines Variationsproblems für das ebene Walzen	11
E. Lanckau, H.-D. Langer Ein mathematisches Modell des Festkörperkondensators mit poröser Anode	18
H. Richter Analytische Behandlung eines nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystems der isothermen Adsorption	24
W. Runge Analytische Modellierung und Optimierung deterministi- scher Wartesysteme	31
G. Schwarze Kontinuierliche digitale Simulationssysteme als Arbeitsmittel des Ingenieurs	50
R. Trabitze, J. Epperlein Die Beschreibung der Formalkinetik fotochemischer Systeme in festen Schichten durch ein Kontinuumsmodell	69
K.-R. Biermann Weierstraß über Gauß	76
Informationen	81
Buchbesprechungen	83

EIN MATHEMATISCHES MODELL DES FESTKÖRPER- KONDENSATORS MIT PORÖSER ANODE

E. Lanckau, H-D. Länger

Der Festkörperkondensator mit poröser Anode hat als Elektrolytkondensator eine außerordentliche technische Verbreitung gefunden. Zur konstruktiven und technologischen Optimierung des Bauelements mit dem Ziel einer anwendungsbezogenen Beeinflussung der Funktionsparameter werden mathematische Modelle benötigt, die eine weitgehende Simulation des praktischen Befundes gewährleisten. Im folgenden wird ein solches Modell entwickelt.

Die Impedanz ist eine komplexe Größe Z , für die das Ohmsche Gesetz gilt:

$$Z = U/J \quad (1)$$

J ist die komplexe Stromstärke und U die komplexe Spannung. Für die Serienschaltung von Kapazität C_S und Widerstand R_S bestehen die Zusammenhänge

$$C_S = 1/(\omega \operatorname{Im} Z), \quad (2)$$

$$R_S = \operatorname{Re} Z \quad (3)$$

$$\text{und} \quad \tan \delta_S = \omega C_S R_S = \operatorname{Re} Z / \operatorname{Im} Z, \quad (4)$$

worin ω die Kreisfrequenz und $\tan \delta_S$ den Serienverlustfaktor bedeuten.

Läßt man induktive Komponenten unberücksichtigt, so werden bei gegebenen J und U mit Hilfe des Gleichungssystems (1) bis (4) die wesentlichen seriellen Funktionsparameter eines Kondensatorbauelements beschrieben. Die lokalisierte Betrachtungsweise der Parameter von elektronischen Bauelementen, die sich im Grenzfall niedriger Frequenz eines anliegenden elektrischen Wechselfeldes bewährt hat, versagt, wenn sich das Parametersystem durch stetig verteilte Ortsfunktionen auszeichnet. Dieser Fall liegt beim Festkörperkondensator mit Sinteranode vor. Grundsätzlich trennt beim Kondensatorelement die "Fläche" des Dielektrikums zwei leitende Halbräume eindeutig voneinander, doch ist hier anders als z. B. beim ebenen bzw. gewickelten Plattenkondensator eine kompliziertere geometrische Situation insofern gegeben, als die Dielektrikumsfläche mehrfach in räumlicher Ver-

netzung und Strukturierung zusammenhängt. Die räumliche Anordnung kapazitiver und resistiver Komponenten des verteilten Systems ist infolge technologischer Einflußfaktoren im Realfall als inhomogen anzunehmen. Im folgenden wird der Einfachheit halber von einem idealisierten, homogenen System ausgegangen, dessen Komponenten bekannt sein sollen, d.h., bei gegebener Kapazitätsdichte σ leistet das Volumenelement ΔV einen verteilten Kapazitätsbeitrag ΔC mit

$$C = \sigma \cdot \Delta V, \quad (5)$$

und die verteilte resistive Komponente R berechnet sich für eine beliebige Richtung n_k ($k, l = x, z$) des kartesischen Koordinatensystems gemäß

$$R_k = \rho \cdot \Delta k / \sqrt{l+k} \Delta l; \quad (6)$$

ρ ist der vorgegebene spezifische elektrische Widerstand, Δk ist das Längenelement der Richtung n_k . Das Produkt im Nenner von (6) ist gleich dem Querschnitt des Volumenelementes senkrecht dazu.

Die Kapazitätsdichte und die resistiven Komponenten sollen entsprechend Bild 1 innerhalb der Elementarzelle des verteilten Systems den Raumrichtungen zugeordnet sein, wobei infolge der Parallelschaltung der Kapazitätselemente die zulässige Zusammenfassung zum verteilten Kapazitätsbeitrag C angedeutet wird. Das Bild veranschaulicht die Stromstärke- und Spannungsverhältnisse an den Eckpunkten der Elementarzelle. Durch Anwendung des Ohmschen Gesetzes und der Kirchhoffschen Knotenregel erhält man dann das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} J_x(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - J_x(x, y+\Delta y, z+\Delta z) = \\ J_y(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - J_y(x, y, z+\Delta z) \\ + J_z(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - J_z(x, y+\Delta y, z) \\ + J_C(x, y+\Delta y, z+\Delta z), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y+\Delta y, z+\Delta z) = \\ = R_x J_x(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z), \end{aligned} \quad (8)$$

$$U(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y, z+\Delta z) = R_y J_y(x, y+\Delta y, z+\Delta z), \quad (9)$$

$$U(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x, y+\Delta y, z) = R_z J_z(x, y+\Delta y, z+\Delta z), \quad (10)$$

$$U(x, y+\Delta y, z+\Delta z) = R_C J_C(x, y+\Delta y, z+\Delta z). \quad (11)$$

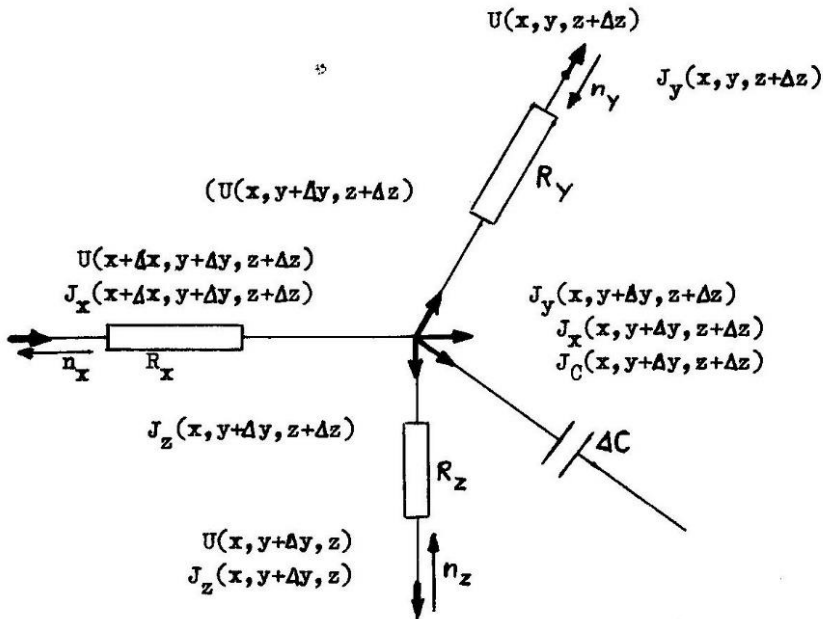


Bild 1: Zum Modell der Kondensatorstruktur
(Zuordnung der Strompfade zur Elementarzelle der verteilten Parameter)

Den Blindwert des verteilten Kapazitätselementes erhält man durch

$$R = 1/(i\omega \Delta C). \quad (12)$$

In Analogie zu (6) werden die Komponenten des Stromdichtevektors \vec{j} definiert:

$$j_k = J / \prod_{l \neq k} \Delta l. \quad (13)$$

Nach Einführung des Volumenelements $V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ werden (5) und (12) in (11) eingesetzt und man erhält

$$J_C(x, y+\Delta y, z+\Delta z) = i\omega \Delta x \Delta y \Delta z U(x, y+\Delta y, z+\Delta z). \quad (14)$$

Man kann nun zeigen, daß nach Einsetzen von (14) in (7) sowie von (6) in (8) bis (10) unter Berücksichtigung von (13) und nach Durchführung des Grenzüberganges $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ folgende Gleichungen erhalten werden:

$$\partial j_x / \partial x - \partial j_y / \partial y - \partial j_z / \partial z = i\omega c U \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial U / \partial x &= \rho j_x \\ \partial U / \partial y &= \rho j_y \\ \partial U / \partial z &= \rho j_z \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Die zweiten partiellen Ableitungen aus den Gleichungen (16) werden in (15) eingeführt, und man erhält die lineare partielle Differentialgleichung

$$\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = i\omega \rho c U \quad (17)$$

die in Zylinderkoordinaten lautet:

$$\partial^2 U / \partial r^2 + \partial U / r \partial r + r^{-2} \partial^2 U / \partial \varphi^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = i\omega \rho c U. \quad (18)$$

Zur weiteren Behandlung führt man dimensionslose Zylinderkoordinaten ein und bezeichnet sie wieder mit r, z, φ . Dann erfüllt der zylindrische Kondensator mit einem durchgehend eingelagerten axialen Draht vom Radius r_0 das Raumbereich (stets ist $0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

$$K = \{ (r, z) \mid r_0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1 \},$$

mit dem Rand $\partial K = D + M + B$. Der Rand D ist der Rand des Drahtes, $D = \{ (r, z) \mid r = r_0, -1 \leq z \leq 1 \}$; $M = \{ (r, z) \mid r = 1, -1 \leq z \leq 1 \}$ ist der Mantel des Kondensators, und $B = \{ (r, z) \mid r_0 \leq r \leq 1, z = \pm 1 \}$ besteht aus seiner Deckfläche und seinem Boden. (Mit $r_0 = 0$ behandeln wir Kondensatoren ohne Draht, die Randkomponente D entfällt dann.)

Bezogen auf das praktische Problem hat man zusätzlich zu (17) oder (18) für das Potential U eine ortsabhängige Randbedingung zu beachten. Der Einfachheit halber wird

$$U = U_0 \text{ auf } M \text{ und } B \quad (19)$$

festgelegt, das Potential wird auf dem Rand konstant vorgegeben. Die zu lösende Randwertaufgabe lautet also: Es ist die (komplexe) Funktion $U = U(r, z)$ zu bestimmen, die den Gleichungen (18) und

(19) und

$$U = 0 \text{ auf } D$$

genügt.

Man findet (und bestätigt durch Einsetzen):

Es ist $U = U_M + U_B$ mit

$$U_M(r, z) = (4/\pi) U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{A_n(r)}{\Delta_n(1)} \sin(2n-1)\pi z,$$

wo

$$\Delta_n(r) = \begin{vmatrix} J_0(\alpha_n r) & J_0(\alpha_n r_0) \\ N_0(\alpha_n r) & N_0(\alpha_n r_0) \end{vmatrix} \quad \text{für } r_0 > 0,$$

$$= J_0(\alpha_n r) \quad \text{für } r_0 = 0,$$

dabei ist $\alpha_n^2 = -i\rho\omega - (2n-1)^2\pi^2$; J_k, N_k sind die Besselsche und die Neumannsche Funktion der Ordnung k ;

$$U_B(r, z) = U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\varepsilon_n)} \left(1 - r_0 \frac{J_1(\varepsilon_n r_0)}{J_1(\varepsilon_n)}\right) J_0(\varepsilon_n r) \frac{\cosh \mu_n z}{\cosh \mu_n},$$

wo ε_n , $n = 1, 2, \dots$, die Nullstellen von $J(r)$ sind; $\mu_n^2 = \varepsilon_n^2 - i\rho\omega$.

Man zeigt leicht $U_B = 0$ auf M und D , $U_M = U_0$ auf M . Zum Nachweis der Eigenschaften $U_B = 0$ auf M und D , $U_B = U_0$ auf B beachtet man, daß für eine weite Klasse von Funktionen $f(x)$ die Reihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\varepsilon_k x)$$

mit

$$c_k = 2 J_1^{-2}(\varepsilon_k) \int_0^1 J_0(\varepsilon_k t) f(t) t dt$$

gilt (und $\int_0^1 t J_0(t) dt = t J_1(t)$).

Aus U erhält man nach (16) durch partielle Differentiation den Stromdichtevektor, durch nachfolgende Integration den Strom durch den Kondensatorrand und hieraus nach (1) die Eingangsimpedanz und schließlich nach (2) und (3) den Serienwiderstand und die Serienkapazität. Für diese Größen kann man explizit die Abhängigkeit von der Frequenz ω studieren. Für große und für kleine Werte der Frequenz sind dabei asymptotische Ausdrücke für die Zylinderfunktionen nützlich.

Ebenso behandelt man das dreidimensionale (für technologische Untersuchungen nützliche) Randwertproblem im Gebiet

$$K' = \{ (r, z, \varphi) \mid r_0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1, |\varphi - \alpha| \leq \pi \}$$

(geschlitzter Kondensator). (Der Schlitz sorgt dafür, daß das in diesen eingebrachte Kontaktiermaterial einen Teil des Serienwiderstandes des inneren Katodenbereiches kompensiert. Damit sinkt der effektive Serienwiderstand des Bauelementes.)

Bemerkenswert ist hierbei, daß man zur Erfüllung der Randbedingung auf dem "Schlitz"

$$S = \{ (r, z, \varphi) \mid r_0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1, |\varphi - \alpha| = \pi \}$$

Zylinderfunktionen rein imaginärer Ordnung heranziehen muß.

Die vorausgehenden Betrachtungen zeigen, daß der beschrittene Weg, die Kondensatorstruktur im Modell der verteilten Parameter in mehrdimensionaler Betrachtungsweise zu behandeln, zu grundsätzlich mathematisch beherrschbaren Ausdrücken führt. Numerische Näherungsrechnungen zeigen eine gute qualitative Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund. Eine detaillierte Analyse beweist, daß die mehrdimensionale Berechnungsmethode bessere Möglichkeiten eröffnet als die bisher in der Literatur zitierten Ansätze, um eine qualitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zu erreichen. In diesem Sinne sind Fortschritte zu erwarten, wenn man die Randbedingungen den realen Verhältnissen besser anpaßt. Das entwickelte mathematische Konzept bietet gute Voraussetzungen für entsprechende allgemeine und numerische Lösungen.

Literatur

Langer, H.-D., Grundlagen der Technologie und der Bauelementefunktion des Festkörper-Elektrolytkondensators, Dissertation B, TH Karl-Marx-Stadt, 1978