

Mehrdimensionale Behandlung der Bauelementefunktion von Elektrolytkondensatoren mit poröser Anode

H.-U. Döring, KDT, Teltow; H.-D. Langer, Karl-Marx-Stadt

Mitteilung aus dem VEB Forschungszentrum Elektronik Teltow und der TH Karl-Marx-Stadt, Sektion Physik/Elektronische Bauelemente

Deskriptoren: Elektrolytkondensatoren mit poröser Anode, Bauelementefunktion, mehrdimensionale Rechnung, Bessel-Funktion

Die von der dielektrischen Schicht aufgespannte Trennfläche zwischen den Elektroden ist beim Elektrolytkondensator mit poröser Anode (Pulverbett, Preßkörper, Sinterkörper) mehrfach zusammenhängend räumlich angeordnet. Auch die Elektroden-Teilgebiete liegen in räumlicher Vernetzung und Strukturierung vor. Die bisher in der Literatur bekannt gewordenen Rechnungen anderer Autoren zur Bauelementefunktion gingen nur von eindimensionalen Betrachtungen aus.

Nachfolgend wird über Fortschritte bei der mehrdimensionalen Behandlung des Problems berichtet. Das physikalische Grundmodell beschränkt sich auf verteilte resistive und kapazitive Komponenten. Induktive Effekte wurden vernachlässigt.

Die zugrunde liegende Kontinuum-Theorie und die Ergebnisse der in diesem Rahmen durchgeführten analytischen und numerischen Untersuchungen sind nicht auf die Behandlung von Elektrolytkondensatoren begrenzt. Weitere Anwendungsfälle gibt es beispielsweise bei keramischen Kondensatoren (Sperrschicht,

Vielschicht) sowie bei Doppelschicht-Kondensatoren, Ionisatoren, Stromgeneratoren, Gasgeneratoren, Sensoren usw.

1. Mathematische Formulierung und analytische Lösung des Problems

Bei der mathematischen Behandlung des Festelektrolytkondensators mit poröser Oxidelektrode wurde in früheren Arbeiten [1] [2] [3] eine lineare Differentialgleichung für das Potential U hergeleitet. Für den Fall des Zylinderkondensators mit axial-symmetrisch eingebettetem Anodenanschlußdraht ergibt sich

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = i \omega \varrho c U. \quad (1)$$

Darin bedeuten r, z Zylinderkoordinaten,

$$G = \{(r, z) : r_0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq H\}$$

betrachteter Zylinder, $U = U(r, z)$ komplexes Potential, ω Kreisfrequenz, ϱ spezifischer elektrischer Widerstand, c komplexe Kapazitätsdichte der Kondensatorstruktur, i imaginäre Einheit.

In Anlehnung an praktische Probleme ist zusätzlich zu Gl. (1)

für das Potential U eine ortsabhängige Randbedingung zu beachten. Der Einfachheit halber wird

$$U = U_0 = \text{const auf dem Rand } \partial G \quad (2)$$

festgelegt.

Das betrachtete Kondensatormodell enthält keine induktiven Komponenten, da sich diese erst bei hohen Frequenzen entsprechend auswirken. Außerdem bleiben die sogenannten lokalisierten Parameter unberücksichtigt, die durch die werkstoffbedingte und technologische Konzeption der Katodenbeschichtung und der Kontaktierung des Bauelements entstehen. Ihr Einfluß kann aber im Modell der lokalisierten Parameter berücksichtigt werden [3]. In [1] bis [4] ist das Randwertproblem nach den Gln. (1) und (2) mit der Fourier-Methode gelöst worden. Entsprechend dem Superpositionsprinzip gilt

$$U(r, z) = U_1(r, z) + U_2(r, z) + U_3(r, z), \quad (3)$$

wobei $U_1(r, z)$ die Randbedingung nach Gl. (2) auf dem Zylindermantel erfüllt; alle übrigen Flächen sind geerdet. $U_2(r, z)$ erfüllt Gl. (2) auf der Deckfläche und $U_3(r, z)$ auf der Bodenfläche; die entsprechenden anderen Flächen sind geerdet. Unter Vernachlässigung des Einflusses des Anodenanschlußdrahtes ($r_0 \rightarrow 0$) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} U_1(r, z) &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{4 U_0 J_0(\alpha_\beta r) \sin \beta z}{(2\lambda-1) \pi J_0(\alpha_\beta R)}, \\ J_2(r, z) &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{2 U_0 \sinh(\beta_\lambda z) T J_0\left(a_\lambda \frac{r}{R}\right)}{\sinh(\beta_\lambda H) \alpha_\lambda J_1(\alpha_\lambda)}, \\ U_3(r, z) &= U_2(r, H-z) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

mit

$$\beta = \frac{2\lambda-1}{H} \pi, \quad (5)$$

$$\alpha_\beta = \sqrt{-\beta^2 - b^2}, \quad (6)$$

$$\beta_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\alpha_\lambda}{R}\right)^2 + b^2}, \quad (7)$$

$$b^2 = i \varrho c \omega. \quad (8)$$

α_λ sind die positiven Nullstellen der Bessel-Funktion J_0 in geordneter Reihenfolge.

Die Lösung U von Gl. (1) und Gl. (2) für den Fall des zylindrischen Festelektrolytkondensators mit Berücksichtigung des Anodenanschlußdrahtes ist weiteren Untersuchungen vorbehalten.

Für die Charakterisierung der Bauelementefunktion ist die komplexe Eingangsimpedanz

$$Z = \frac{U_0}{I_g} \quad (9)$$

eine wichtige Größe. I_g ist der komplexe Strom, der durch den Kondensatorrand A fließt. Dabei gilt

$$I_g = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}, \quad \text{mit } \vec{j} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \quad (10)$$

als Stromdichtevektor.

Wird für das betrachtete Kondensatormodell eine Serienschaltung von Kapazität C_S und Widerstand R_S zugrunde gelegt, so gilt mit $Z = \text{Re } Z - i \text{Im } Z$:

$$R_S = \text{Re } Z, \quad C_S = \frac{1}{\omega \text{Im } Z},$$

$$\tan \delta_S = \frac{\text{Re } Z}{\text{Im } Z} = \omega R_S C_S, \quad |Z| = \sqrt{(\text{Re } Z)^2 + (\text{Im } Z)^2} \quad (11)$$

mit $\tan \delta_S$ Serienverlustfaktor und $|Z|$ Betrag der Impedanz. Aus den Gln. (3) bis (10) erhält man für die komplexe Eingangsimpedanz Z :

$$Z = \frac{\varrho}{8 R b^2} \frac{1}{\pi R \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\tanh \frac{\beta_\lambda H}{2}}{\alpha_\lambda^2 \beta_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\alpha_\beta R)}{(2\lambda-1) \beta \alpha_\beta J_0(\alpha_\beta R)}} \quad (12)$$

Durch Trennung von Gl. (12) in Real- und Imaginärteil können die Bauelementparameter R_S , C_S , $\tan \delta_S$ und $|Z|$ explizit angegeben werden, was aber im vorliegenden Fall einige Schwierigkeiten bereitet. In [1] [3] wurden daher Näherungsausdrücke für Z betrachtet. Mit ihnen wurde das Verhalten der elektrischen Parameter für kleine, mittlere und hohe Frequenzen untersucht.

Nachfolgend werden die Größen R_S , C_S , $\tan \delta_S$ und $|Z|$ im gesamten Frequenzbereich mit geeigneten numerischen Methoden mit einer relativen Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-4}$ dargestellt.

2. Numerische Auswertung der Bauelementparameter

Nach [1] kann man die komplexe Kapazitätsdichte c folgendermaßen ansetzen:

$$c = c_{ox} \left[1 + g_c - i \left(\frac{g_{ox}}{\omega} + \tan \delta_{ox} \right) \right]. \quad (13)$$

Dabei sind c_{ox} , g_c , g_{ox} , $\tan \delta_{ox}$ elektrische Größen, die die Kondensatoreigenschaften charakterisieren, z. B. c_{ox} Dichte der Oxidkapazität, $\tan \delta_{ox}$ Verlustfaktor der Oxidschicht, g_{ox} wird für den gesamten Frequenzbereich angesetzt:

$$g_{ox} = \frac{1}{R_{is} C_{ox}} \quad (14)$$

mit R_{is} Isolationswiderstand und C_{ox} Kapazität der Oxidschicht. Es gilt $c_{ox} = C_{ox}/V$; V ist das Volumen des Sinterkörpers. Den Wertebereich mit praktisch relevanten Daten der elektrischen Parameter zeigt Tafel 1.

Die Größe g_c wird Null gesetzt.

Um die Impedanz Z für den gesamten Frequenzbereich numerisch zu berechnen, müssen die in Gl. (12) enthaltenen Terme in Real- und Imaginärteil getrennt werden. Der Ablauf kann nur angedeutet werden, da eine ausführliche Beschreibung den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde.

Nach den Gln. (7), (8), (13), (14) gilt

$$\beta_\lambda = \sqrt{x + i y} \quad (15)$$

mit

$$x = \left(\frac{\alpha_\lambda}{R}\right)^2 + \frac{\varrho}{R_{is} V} + c_{ox} \varrho \tan \delta_{ox} \omega,$$

$$y = \varphi c_{ox} (1 + g_c) \omega.$$

Gleichung (15) läßt sich in Real- und Imaginärteil trennen, und mit $A = \sqrt{2 \sqrt{x^2 + y^2} + x}$ gilt $\text{Re } \beta_\lambda = A/2$, $\text{Im } \beta_\lambda = y/A$. Die Trennung von α_β in Real- und Imaginärteil erfolgt gleichfalls nach diesem Verfahren.

Die Funktion $\tanh(u + i v)$ wird wie folgt behandelt:

$$\tanh(u + i v) = \frac{\sinh 2u + i \sin 2v}{\cosh 2u + \cos 2v}.$$

Unter Berücksichtigung der Standardfunktionen in der Programmiersprache PL/I gilt mit $B = (1 + \tanh 2u) e^{2u}$:

$$\tanh(u + i v) = \frac{\tanh 2u + i B \sin 2v}{1 + B \cos 2v}.$$

Tafel 1. Wertebereich der geometrischen und elektrischen Parameter

	Minimal	Relevant	Maximal	
$\tan \delta_{ox}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	
c_{ox}	10^{-4}	$2,5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	F/cm ³
$f = \frac{\omega}{2\pi}$	10^{-5}	50	10^6	s ⁻¹
R_{is}		20		M Ω
ε	10^{-2}	1	10^3	Ωcm
R	0,05	0,15	0,35	cm
H	0,15	0,4	1	cm

Die Trennung von $J_1(z)/J_0(z)$ in Real- und Imaginärteil ist weitaus aufwendiger. Da für das betrachtete Kondensatormodell z betragsmäßig relativ große Werte annehmen kann, ist eine Berechnung von $J_n(z)$ durch Reihendarstellung unakzeptabel. Um $J_n(z)$ für den gesamten ω -Bereich zu berechnen, wird von der Integraldarstellung für die modifizierte Bessel-Funktion $I_n(z)$ Gebrauch gemacht. Zu berechnen ist der Ausdruck

$$\frac{J_1(\alpha\beta R)}{\alpha\beta J_0(\alpha\beta R)} = \frac{I_1(Rw)}{w I_0(Rw)}, \quad w = \sqrt{\beta^2 + b^2}.$$

Die Integraldarstellung für $I_\nu(z)$ lautet

$$I_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta d\theta,$$

$$\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}.$$

Durch Variablensubstitution und mit einigen Umformungen ergibt sich:

$$\frac{J_1(\alpha\beta R)}{\alpha\beta J_0(\alpha\beta R)} = \frac{R}{2} \frac{\int_0^{\pi/2} e^{-Rw(1-\cos 2t)} (1-\cos 4t) dt}{\int_0^{\pi/2} e^{-Rw(1-\cos 2t)} dt}, \quad (16)$$

$$w = \sqrt{\beta^2 + b^2}.$$

Die Integrale in Gl. (16) werden mit der Simpson-Regel berechnet. Der dabei begangene Fehler nimmt ungefähr wie N^{-4} ab (N ist die Anzahl der Teilintervalle von $[0, \pi/2]$).

Bei der Anwendung der Simpson-Regel auf Gl. (16) wurde gewählt: $N = 50$ für $|Rw| \leq 5$, $N = 200$ für $|Rw| > 5$. Das brachte hinreichend gute numerische Ergebnisse für den in Tafel 1 angegebenen Parameterbereich. So hat der relative Fehler bei der Berechnung des Integrals im Nenner von Gl. (16) für $|Rw| = 10$ die Größenordnung von 10^{-6} .

Nach diesen Vorbetrachtungen erfolgt die eigentliche Berechnung der Eingangsimpedanz Z . Die beiden Summen in Gl. (12) werden jeweils mit einer relativen Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-4}$ berechnet. Wie leicht zu sehen ist, konvergieren die Reihen in Gl. (12) relativ langsam. Mit wachsenden Werten von q , c_{0x} , R , H und ω steigt die Anzahl der Glieder in Gl. (12), die für die angegebene Genauigkeit benötigt werden. Aus diesem Grunde wurde ein Konvergenzbeschleunigungsverfahren, der sogenannte Vektor- ε -Algorithmus von Wynn [5] angewendet.

Die angeführten Verfahren wurden in der Programmiersprache PL/I implementiert und auf dem R 40 gerechnet. Dabei brachte die Anwendung des Vektor- ε -Algorithmus eine Rechenzeitsparung um 1/3 der Rechenzeit bei „direkter“ Summierung. Mit Gl. (11) wurden $\operatorname{Re} Z$, $\operatorname{Im} Z$, $|Z|$, R_S , C_S , $\tan \delta_S$ in Abhängigkeit von den geometrischen und elektrischen Größen, wie R , H , q , c_{0x} im Frequenzbereich $10^{-4} \leq \omega \leq 6 \cdot 10^8$ tabelliert.

3. Grafische Auswertung der Bauelementparameter

Ausgangspunkt ist ein Bauelement mit folgenden geometrischen und elektrischen Werten: $R = 0,15$ cm, $H = 0,7$ cm, $q = 10$ Ω cm, $c_{0x} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ F/cm³, $R_{is} = 20$ M Ω , $\tan \delta_{0x} = 10^{-2}$, $g_c = 0$.

Die Kurvenverläufe von R_S , C_S und $\tan \delta_S$ sind in Abhängigkeit von diesen Parametern im Intervall $10^{-4} \leq \omega \leq 6 \cdot 10^8$ in doppelt logarithmischer Achseneinteilung normiert grafisch dargestellt.

Die Normierung erfolgt in Anlehnung an die Praxis: für C_S , $\tan \delta_S$ bezüglich $f = 50$ Hz, für R_S bezüglich $f = 10^3$ Hz.

Die normierten Größen werden im folgenden mit einem * versehen.

Bild 1 zeigt den typischen Verlauf der normierten Serienseratzkapazität C_S^* in Abhängigkeit vom Parameter q . Kennzeichnend sind das starke Ansteigen von C_S^* im Bereich kleiner Frequenzen und das ausgebildete Plateau im Bereich mittlerer Frequenzen. C_S^* fällt bei höheren Frequenzen mit wachsendem ω in doppelt logarithmischer Darstellung linear mit dem Anstieg $-1/2$ ab. Bei linearer Achseneinteilung bedeutet das

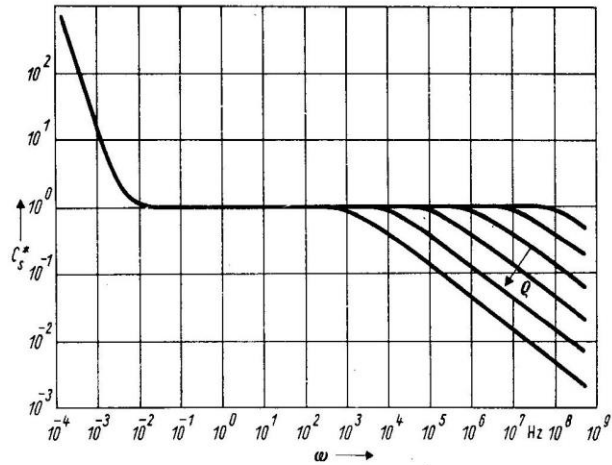


Bild 1. Normierte grafische Darstellung von C_S^* mit q als Parameter

Kurve 1 $q = 10^{-2}$ Ω cm, Kurve 2 $q = 10^{-1}$ Ω cm,
Kurve 3 $q = 10^0$ Ω cm, Kurve 4 $q = 10^1$ Ω cm
Kurve 5 $q = 10^2$ Ω cm, Kurve 6 $q = 10^3$ Ω cm

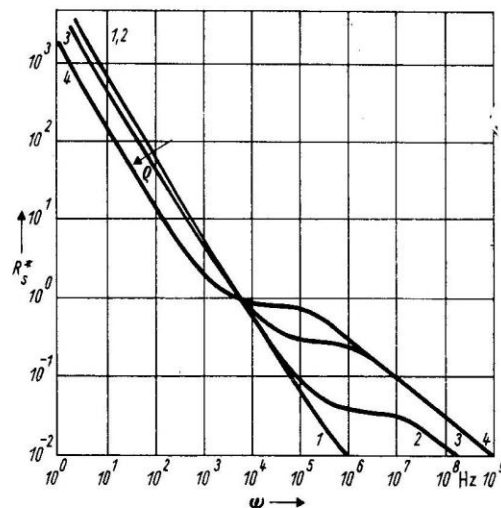


Bild 2. Normierte grafische Darstellung von R_S^* mit q als Parameter:

Kurve 1 $q = 10^{-2}$ Ω cm, Kurve 2 $q = 10^{-1}$ Ω cm,
Kurve 3 $q = 10^0$ Ω cm, Kurve 4 $q = 10^1$ Ω cm

$C_S^* \sim \sqrt{1/\omega}$, was mit den Untersuchungen in [1] übereinstimmt. Charakteristisch für die Kurvenschar ist auch die Beziehung $C_S^* \sim \sqrt{1/q}$ für hohe Frequenzen. In der Praxis strebt jedoch C_S^* mit wachsendem ω gegen eine Konstante $\neq 0$. Diesem trägt das Modell der lokalisierten Parameter Rechnung.

Der normierte Serienseratzwiderstand R_S^* ist in Abhängigkeit von ω und vom Parameter q im Bild 2 dargestellt. Für $\omega \rightarrow 0$ wird R_S^* konstant, was aus Maßstabsgründen im Bild 2 nicht zu erkennen ist. In dem Frequenzbereich, in dem $C_S^* = \text{const} = 1$ ist, gilt $R_S \sim 1/\omega$. Im Bereich mit $C_S^* \sim \sqrt{1/\omega}$ gilt ebenso $R_S^* \sim \sqrt{1/\omega}$, also bei hohen bis sehr hohen Frequenzen. Aus den numerischen Werten für R_S kann man für hohe Frequenzen die Beziehung $R_S \sim \sqrt{1/q}$ ableiten. Durch die Normierung von R_S geht dieses Verhalten von R_S^* aus Bild 2 nicht hervor.

Bild 3 zeigt den Kurvenverlauf von $\tan \delta_S^*$ in Abhängigkeit von ω und q . Dabei tritt ein ausgeprägtes Minimum im Bereich mittlerer Frequenzen auf. Im betrachteten Kondensatormodell gilt für hohe Frequenzen $\tan \delta_S^* \rightarrow \text{const}$. Beim realen Kondensator steigt der Verlustfaktor für hohe Frequenzen wieder [3] [4].

Dieses Ansteigen läßt sich durch Einführung von lokalisierten Parametern, wie Bahnwiderstand des Sinterkörpers, Kapazität der geometrischen Oberfläche des Sinterkörpers, Induktivitäten des Bauelements usw. approximieren, worauf in später folgenden Arbeiten eingegangen werden soll.

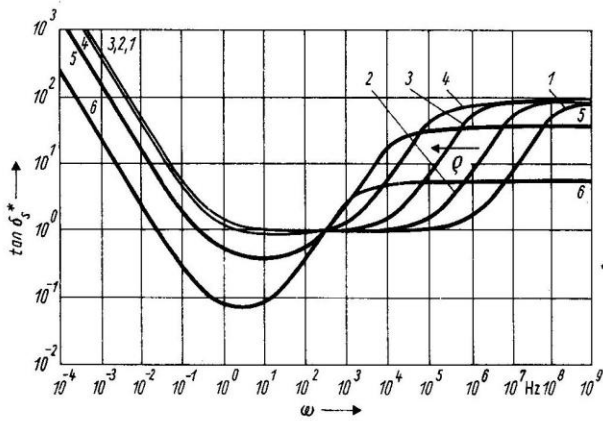


Bild 3. Normierte grafische Darstellung von $\tan \delta_S$ mit ρ als Parameter
 $\rho = 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 \Omega \text{cm}$

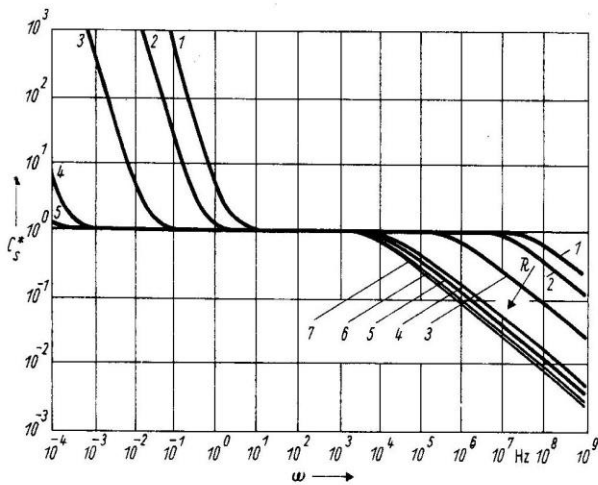


Bild 4. Normierte grafische Darstellung von C_S^* mit R als Parameter
 Kurve 1 $R = 7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$, Kurve 2 $R = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$,
 Kurve 3 $R = 7 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$, Kurve 4 $R = 7 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$,
 Kurve 5 $R = 1,5 \text{ cm}$, Kurve 6 $R = 7 \text{ cm}$, Kurve 7 $R = 7 \cdot 10^1 \text{ cm}$

Bild 4 zeigt die Abhängigkeit der normierten Serienerkatzkapazität C_S^* von ω und vom Zylinderradius R . Darin fällt insbesondere das starke Auffächern der Kurvenschar bei niedrigen Frequenzen auf, was mit einer Einengung des Plateaus mit abnehmendem Radius einhergeht.

4. Definition und Diskussion charakteristischer Kreisfrequenzen

Der Kurvenverlauf von C_S^* (Bild 1) ermöglicht die Definition einer kritischen Kreisfrequenz ω_{krit} der folgenden Art. Wird eine Gerade an die C_S^* -Kurve für hohe Frequenzen gelegt, so schneidet sie die Plateaulinie $C_S^* = 1$. Die Abszisse des Schnittpunkts sei ω_{krit} . Bild 5 zeigt die Abhängigkeit der so definierten kritischen Kreisfrequenz von ρ , R und H .

Es sind folgende Beziehungen zu erkennen: $\omega_{\text{krit}} \sim 1/\rho$; für R und H kleiner als 10^{-1} cm gilt $\omega_{\text{krit}} \sim 1/R^2$, $\omega_{\text{krit}} \sim 1/H^2$. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß sich bei extremer Vergrößerung des Bauelements (ein geometrischer Parameter ist jeweils fixiert) der Wert von ω_{krit} nicht mehr wesentlich ändert. Durch Anwendung geeigneter numerischer Verfahren läßt sich das Minimum des Serienverlustfaktors $\tan \delta_S$ lokalisieren. Die entsprechende Kreisfrequenz sei ω_{min} . Im Bild 6 ist ω_{min} als

Bild 5
 Grafische Darstellung von ω_{krit} in Abhängigkeit von ρ , H und R
 Kurve A $\omega_{\text{krit}} = \omega_{\text{krit}}(H)$,
 Kurve B $\omega_{\text{krit}} = \omega_{\text{krit}}(R)$,
 Kurve C $\omega_{\text{krit}} = \omega_{\text{krit}}(\rho)$;
 Die entsprechenden anderen Parameter sind mit den Werten aus Abschn. 3. fixiert.

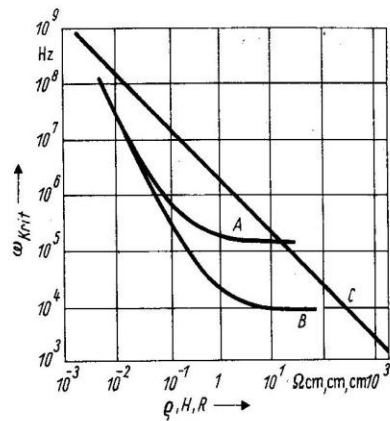
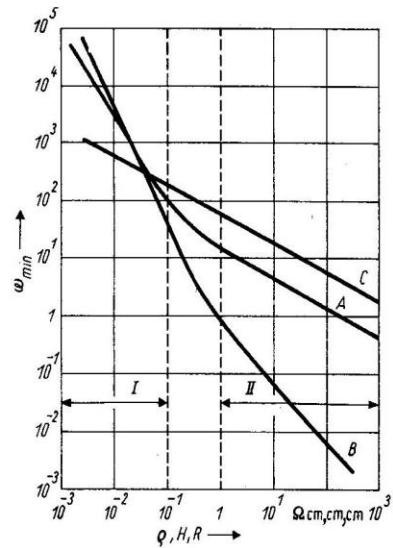


Bild 6
 Grafische Darstellung von ω_{min} in Abhängigkeit von ρ , H und R :
 Kurve A $\omega_{\text{min}} = \omega_{\text{min}}(H)$,
 Kurve B $\omega_{\text{min}} = \omega_{\text{min}}(R)$,
 Kurve C $\omega_{\text{min}} = \omega_{\text{min}}(\rho)$;
 die entsprechenden anderen Parameter sind fixiert



Funktion von R , H und ρ dargestellt. Man erkennt daran die folgenden Zusammenhänge:

$$\omega_{\text{min}} \sim \sqrt{\frac{1}{\rho}}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\text{min}} &\sim \frac{1}{R^2} \\ \omega_{\text{min}} &\sim \frac{1}{H^2} \end{aligned} \right\} \text{im Bereich I}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\text{min}} &\sim \frac{1}{R} \\ \omega_{\text{min}} &\sim \sqrt{\frac{1}{H}} \end{aligned} \right\} \text{im Bereich II.}$$

Eingegangen am 21. Dezember 1981

NaA 8810

Literatur

- [1] Langer, H.-D.: Grundlagen der Bauelementefunktion und der Technologie von Festkörper-Elektrolytkondensatoren. Dissertation B, TH Karl-Marx-Stadt 1978
- [2] Lanckau, E.; Langer, H.-D.: Ein mathematisches Modell des Festkörperkondensators. Wissenschaftl. Z. der Technischen Hochschule Otto von Guericke Magdeburg 23 (1979) 6, S. 563–565
- [3] Langer, H.-D.: Festkörperelektrolytkondensatoren. Berlin: Akademie-Verlag 1982
- [4] Döring, H.-U.: Arbeitsbericht, TH-Karl-Marx-Stadt (1981), unveröffentlicht
- [5] Brezinski, C.: Acceleration de la convergence en analyse numerique. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1977

Dipl.-Math. Hans-Ulrich Döring, VEB Forschungszentrum Elektronik Teltow, 1530 Teltow, Ernst-Thälmann-Straße 10; Dr. sc. nat. Hans-Dieter Langer, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, Sektion Physik/Elektronische Bauelemente, 9010 Karl-Marx-Stadt, Postschließfach 964