Der Inhalt des nachstehenden Sonderdruckes aus dem Jahr 1994 geht auf die inhaltliche Anregung durch den Autor (Hans-Dieter Langer, Sektion Physik/Elektronische Bauelemente) und seine jahrelange Forschungszusammenarbeit mit dem Lehrstuhl `Angewandte Mathematik` der Fakultät Mathematik an der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt/Chemnitz zurück. Die enge Kooperation mit dem Lehrstuhlleiter Prof. Eberhard Lanckau ist bezüglich der theoretischen Physik des Festkörperelektrolytkondensators, insbesondere dessen Bauelementefunktion und der Dimensionierung seiner Sinterkörper-Anode, äußerst fruchtbar gewesen. So sind gemeinsame Veröffentlichungen, die Diplomarbeit des Mathematikers Hans-Ulrich Döring sowie die Dissertation des am oben genannten Mathematik-Bereich tätigen Physikers Dr. Werner Barthel daraus hervorgegangen. Auch wurden die Habilitation des Autors und zahlreiche seiner betreuten Studenten und weiterer Doktoranden wesentlich befördert.

Mathematische Modellierung von Elektrolytkondensatoren

WERNER BARTHEL und EBERHARD LANCKAU

Technische Universität Chemnitz-Zwickau

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschränkt sich vor allem auf Festkörperelektrolytkondensatoren (FEK). Da sie das wirtschaftlich wertvolle Tantal enthalten, ist die Untersuchung von FEK von günstiger geometrischer Gestalt von Interesse. Gearbeitet wird mit einem einfachen Modell, das von LANGER [12] und LANCKAU [11] aufgestellt wurde. Es wird untersucht, wie die Formgebung der FEK die für die Praxis wichtigen Kenngrößen beeinflußt. Insbesondere wird der mehrfach geschlitzte Kreiszylinderkondensator (KZK) betrachtet und mit dem ungeschlitzten KZK verglichen.

Mathematisch gesehen handelt es sich um die Untersuchung der Helmholtzgleichung mit Randbedingungen erster Art an den Oberflächen beliebig geformter Körper, insbesondere geschlitzte KZK en. Die Betrachtung von Randwertproblemen dieser Art ist auch bei anderen naturwissenschaftlich-technischen Problemen von Interesse.

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung **5**

1 Das mathematische Modell **7**

2 Einige Begriffe **8**

3 Kondensatoren beliebiger Geometrie **10**

3.1 Kleine und mittlere Frequenzen 10

3.2 Große Frequenzen 11

3.3 Der Übergang von mittleren zu großen Frequenzen 11

3.4 Eine Abschätzung der Kapazität für mittlere Frequenzen 12

3.5 Kondensatorgeometrie und Kondensatoreigenschaften 13

4 Aussagen für lange Kondensatoren **14**

4.1 Der lange ungeschlitzte Kreiszylinderkondensator (KZK) 15

4.2 Der lange M-fach geschlitzte Kreiszylinderkondensator 16

4.2.0 Einleitende Bemerkungen 16

4.2.1 Der bis zur Katode durchgeschlitzte KZK: I. Das Lösungsverfahren . 17

4.2.2 Der bis zur Katode durchgeschlitzte KZK: II. Ausführungen zur Lösung des Randwertproblems (4.18) 20

4.2.3 Der bis zur Katode durchgeschlitzte KZK: III. Lösung mittels Orthogonalisierung nach E. Schmidt 21

4.2.4 Die Betrachtung des Einflusses vom Spaltpotential 23

4.3 Zahlenbeispiele zu 4.1 und 4.2 24

4.4 Diskussion und Schlußfolgerungen 27

5 Endlich lange Kreiszylinderkondensatoren **28**

5.1 Der dünnwandige KZK: $(1-a) \ll 1$ 28

5.2 Der KZK mit dünnem Katodendraht: $a \ll 1$ 28

6 Anhang: Eindimensionales Verständnis der Ergebnisse von Abschnitt 4 **29**

6.1 Der geschlitzte flache Zylinderkondensator 29

6.2 Der ungeschlitzte und der geschlitzte KZK 31

7 Literatur **31**

Bezeichnungen und Symbole

A Fläche

a Quotient aus Innen- und Außenradius

A_B Maßzahl der Oberfläche von A

C Kapazität

c spezifische Kapazität

DG Differentialgleichung

Δ Laplace-Operator

FEK Festkörperelektrolytkondensator

f_G Grenzfrequenz, Übergang von mittleren zu großen Frequenzen Abs. 3.3

f_{krit} kritische Frequenz entspricht etwa f_G Abs. 3.3

$\Phi(\varphi)$ Abs. 4.2.1

Φ_+, Φ_- Abs. 4.2.3

g_r Konstante Abs. 1 und 4.3

$\gamma := \gamma(\omega)$ Materialgleichung (1.4), (1.5)

Γ Menge der ganzen Zahlen

$\Gamma_{...}$ gekrümmte Fläche Abs. 1

H Höhe eines Kondensators

I Stromstärke (1.7)

i imaginäre Einheit

$J_\nu(x)$ Besselfunktion

$\vec{j}$ Stromdichtevektor

k von der Kreisfrequenz ω abhängige Größe (1.4)

KZK Kreiszylinderkondensator

λ, λ_n Eigenwert (4.22)

$N_\nu(x)$ Neumannsche Funktion

p,$P = pHR^2$ nur von der geometrischen Gestalt eines Kondensators abhängige Größe, Abs. 3.1

p dimensionslose Größe, (3.4)

q, $Q = qR^2$ nur von der geometrischen Gestalt eines Kondensators abhängige Größe, Abs. 3.1

q dimensionslose Größe, (3.4)

R Zylinderaußenradius

$R_S \equiv S$ Ohmscher Widerstand des Kondensators

R_i, R_a, R_z Radien, Abs. 4.2.0

$R(r)$ s. (4.19)

R^m m-dimensionaler euklidischer Raum

R_{is} Materialkonstante (4.43)

ρ Materialkonstante (1.4), Abs. 4.3

RWP Randwertproblem

$T := -\ln a$

$\tan\delta$ Verlustfaktor (ist frequenzabhängig)

$\tan\delta_{0x}$ Materialkonstante (1.5), Abs. 4.3

τ Eigenwert

U Potential, Lösung des Randwertproblems von Abs. 1

U^I, U^{II} Lösungen der Randwertprobleme (4.17),(4.18)

V_{SK} Sinterkörpervolumen, Abs. 1

w,W $= wR^2$ nur von der Gestalt eines Kondensators abhängige Größen, Abs. 3.1

w dimensionslose Größe, (3.4)

ω Kreisfrequenz

$z = \ln r$

Z Impedanz

0 Einleitung

Die vorliegende Abhandlung soll ein Beitrag zu einer mathematischen Behandlung von Elektrolytkondensatoren - insbesondere von Festkörperelektrolytkondensatoren (FEK) - sein. Dabei geht es weniger um aktuelle Trends in der Elektrotechnik - das sei dem Elektrotechniker überlassen - als um die grundlegenden mathematischen Methoden, die z. B. der Elektroingenieur benutzt.

Im Zuge der Miniaturisierung von elektronischen Bauelementen werden Kondensatoren hoher Kapazitätsdichte gefordert, die in einem breiten Temperaturbereich mit großer Zuverlässigkeit arbeiten und deren Kapazität in einem großen Frequenzintervall konstant ist. In diesen Eigenschaften sind Tantal-FEK - auch wenn man den hohen Weltmarktpreis von Tantal in Rechnung stellt - unübertroffen.

Die Anode des Tantal-FEK hat oft die Gestalt eines langen Kreiszylinders, der, damit eine große Oberfläche entsteht, porös ist und (u. a.) aus feinen Tantalpartikeln besteht (RINT [16]).

Etwas schematisiert entsteht vom realen Kreiszylinderkondensator (künftig kurz KZK) folgendes Bild (s. Bild 0.1):

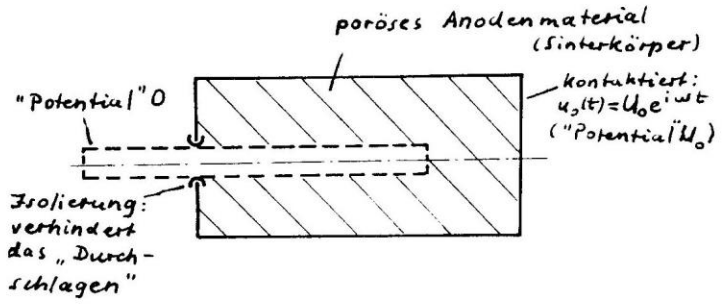
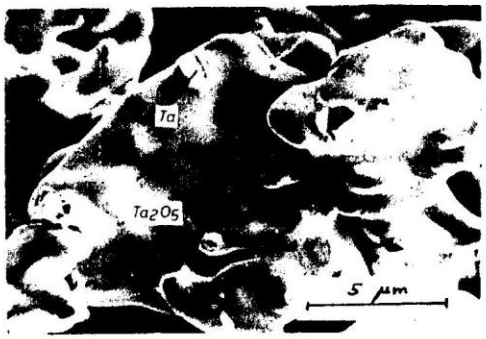


Bild 0.1:Realer Kreiszylinderkondensator (schematisiert)

Bild 0.2 zeigt mit dem Rasterelektronenmikroskop betrachtetes poröses Anodenmaterial:



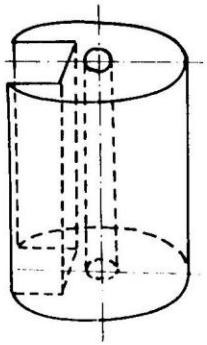


Bild 0.2: Poröses Anodenmaterial **Bild 0.3:** Geschlitzte Anode (gesägt)

Eigenschaften von FEK und Probleme der FEK-Herstellung werden von LANGER [12] eingehend behandelt. Wünschenswert ist z. B., daß der Tantal-FEK - bei gleichem Tantaleinsatz - eine möglichst große Kapazität C_0 aufweist, die bis zu einer möglichst großen Frequenz, wir wollen sie die Grenzfrequenz f_G nennen, konstant ist. Das ist natürlich nur annähernd realisierbar(.In der Praxis wird statt f_G die sogenannte kritische Frequenz f_{krit} definiert als der Wert der Frequenz, bei dem die Kapazität z. B. auf 90% von C_0 abgesunken ist). Ferner sollten der Verlustwiderstand S und der Verlustfaktor $tan\delta$ für praktisch interessierende Frequenzen im Bereich konstanter Kapazität C_0 möglichst klein sein.

Anregungen zu vorliegenden Untersuchungen gaben im damaligen VEB Kondensatorenwerk Freiberg durchgeführte Messungen. Dabei wurde der Einfluß eines in einen langen KZK

gesägten Schlitzes auf die Kondensatorkenngrößen diskutiert (BÖHME/LAUE [8]).

In vorliegender Arbeit werden einige wesentliche Kenngrößen von Tantal- FEK beliebiger geometrischer Gestalt untersucht (Abschnitt 3).Dafür sind analytische Verfahren besonders geeignet, da sie die Lösungen explizit angeben können.

In Abschnitt 4 werden Eigenschaften langer Kondensatoren für verschiedene geometrische Konfigurationen diskutiert. Eine zentrale Stellung nimmt dabei der M-fach geschlitzte KZK ein, der in [4] (für den Sonderfall M=1) eingehend behandelt wurde.

Zur Abrundung werden in Abschnitt 5 einige Sonderfälle endlich langer KZKen behandelt.

Anliegen von Abschnitt 6 (Anhang) ist es, zu zeigen, daß die Ergebnisse von Abschnitt 4.4 bereits eindimensional verständlich sind. Das ist ein wichtiger Hinweis für ihre physikalische Realität.

An dieser Stelle sei erwähnt, daß generell der Einfluß des Magnetfeldes vernachlässigt wurde. Dadurch reicht die Helmholtz-Gleichung mit skalarem Potential aus. Exakte Betrachtungen mit Einbeziehung des Magnetfeldeinflusses, also des Vektorpotentials, müssen späteren Untersuchungen vorbehalten werden.

1 Das mathematische Modell

Betreffs der Gewinnung des mathematischen Modells sei auf die Literatur verwiesen. Vorgegeben ist ein zweifach zusammenhängender Bereich $B \subset E^3$ mit dem Rand $\partial\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Dabei ist E^3 der dreidimensionale euklidische Raum. Γ_1 und Γ_2 sind geschlossene und glatte Flächen. Der Bereich B schließe das Volumen

$$V_{SK} := \iiint_B dV$$

ein.

V_{SK} ist dabei das Volumen der porösen Anode, die man wegen des Herstellungsverfahrens auch Sinterkörper nennt. Nach [11], [12] und [7] ist die Lösung $U(\vec{r})$ der Helmholtzgleichung

$$(\Delta + k^2)U = 0 \; in \; B \subset E^3 \tag{1.1}$$

zu ermitteln, die den Randbedingungen

$$U_{|\Gamma_1} = 1 \quad \text{und} \tag{1.2}$$
$$U_{|\Gamma_2} = 0 \tag{1.3}$$

genügt. Dabei wurde die Amplitude U_0 der an Γ_1 angelegten Wechselspannung auf 1 normiert. k^2 ist eine komplexe Größe, die sich nach

$$-k^2 = c\rho\omega(\gamma + i) \text{ mit } \gamma = \gamma(\omega) \tag{1.4}$$

berechnet. Die genaue Gestalt der Beziehung $\gamma = \gamma(\omega)$ entnimmt man (z. B. mechanischen) Modellen über die Struktur des Elektrolyten. Die imaginäre Einheit i rührt davon her, daß

an die Elektrode Γ_1 die Wechselspannung $u_0(t) = U_0 exp(i\omega t)$ der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ angelegt wurde. Dabei ist f die Frequenz. So geht die Wellengleichung des elektromagnetischen Problems in (1.1) über.

In unseren Zahlenrechnungen (Abschnitt 4.3) verwenden wir die von Langer verschiedentlich benutzte Beziehung

$$\gamma(\omega) = \frac{g_r}{\omega} + \tan\delta_{0x} \,. \tag{1.5}$$

c, ρ und $\tan\delta_{0x}$ sind dabei im wesentlichen Materialkonstanten (g_r siehe (4.43)). Andere Beziehungen als (1.5) geben eventuell die Realität besser wieder. Wir möchten aber hier nur die mathematischen Methoden erläutern. Trends bzw. aktuellere Aussagen müssen dem Anwender überlassen bleiben.

Bemerkung:

Im Modell wird der Einfluß des magnetischen Feldes vernachlässigt. Das ist für nicht zu hohe Frequenzen und nicht zu "kantige"geometrische Formen der porösen Anode vertretbar. Für uns bedeutet das, daß wir mit dem skalaren Potential U arbeiten dürfen, während generell das Vektorpotential des magnetischen Feldes hinzukommt.

Den Anwender interessieren aus $U(\vec{r})$ abgeleitete Größen wie die Kapazität C, der Ohmsche Widerstand S und der Verlustfaktor $\tan\delta$, die Funktionen der Kreisfrequenz ω sind. Diese reellen Größen lassen sich aus $U(\vec{r})$ unter Verwendung des Stromdichtevektors

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}) = -1/\rho \; grad \; U \,, \tag{1.6}$$

aus der Stromstärke I mit dem Gaußschen Integralsatz und (1.1)

$$I = \int\limits_{\Gamma}\int \vec{j} d\vec{A} = -1/\rho \int\int\int \Delta U dV = k^2/\rho \int\int\int U dV \tag{1.7}$$

und der Impedanz $Z = U_0/I = 1/I$, die sämtlich komplex sind, berechnen nach

$$C = \frac{1}{\omega \; \mathrm{Im}\; Z}, \; S = \; \mathrm{Re}\; Z, \; \tan\delta = \frac{\mathrm{Re}\; Z}{\mathrm{Im}\; Z} \tag{1.8}$$

2 Einige Begriffe

Bevor wir auf die Ergebnisse für Kondensatoren beliebiger Geometrie eingehen, führen wir einige Voraussetzungen, Begriffe und Bezeichnungen ein.

Die qualitativen Eigenschaften der Lösungen von (1.1) bis (1.3) sind wesentlich vom Betrag von k^2 abhängig. *Mittlere Kreisfrequenzen* ω (kurz mittlere ω) oder - was hier gleichwertig sein möge - *mittlere Frequenzen f* (mittlere f) sollen vorliegen, wenn die Bedingungen

$$|k^2 R^2| \ll 1 \tag{2.1}$$

und

$$\gamma^2 \ll 1 \tag{2.2}$$

erfüllt sind. Dabei sei R ein Maß für die lineare Ausdehnung des Kondensators, etwa

$$R = \sqrt[3]{V_{SK}},$$

wenn keine Ausdehnung des Körpers bevorzugt ist.

In den Anwendungen werden andererseits oft gerade Kondensatoren beliebigen Querschnitts $B_2 \subset E^2$ der Höhe H verwendet. Bei einem geraden *langen Kondensator*, d. h. bei einem Kondensator, dessen Querschnittsflächeninhalt

$$A_{B_2} \ll H^2$$

ist, wird man

$$R = \sqrt{A_{B_2}}$$

wählen.

Bei einem *flachen Kondensator*, dessen parallele Flächen (die durchaus gekrümmt sein dürfen) einen Abstand H voneinander haben, ist $H \ll R$.

Bei *kleinen* ω gelte (2.1), während (2.2) wegen des Pols von γ an $\omega = 0$ verletzt ist(vgl. (1.5)).

Bei *großen* ω gelte

$$|\, k^2 r_{min}^2 \,| \;\approx c\rho\omega r_{min}^2 \gg 1. \tag{2.3}$$

(Dabei wurde die Beziehung (1.4) benutzt). r_{min} ist der kleinste Krümmungsradius der Flächen Γ_1 und Γ_2.

Bemerkung 1:

Während (2.1) die sichere Anwendbarkeit der Taylorformel garantiert, d. h. die Entwicklung von $U(\vec{r})$ nach Potenzen von k^2 (vgl. [4] und [7]), ist die Bedingung (2.2) für die physikalischen Eigenschaften des Kondensators wesentlich (siehe Abschnitt 3).

Bemerkung 2:

Die Bedingung (2.3) ist nicht so einschneidend, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag: Einerseits treten wegen der Porosität des Sinterkörpers auch an den "Kanten" keine Krümmungsradien $r_{min} = 0$ auf. Andererseits ist es - vom hier betrachteten theoretischen Standpunkt aus - nur ein technisches Problem, r_{min} durch Abschleifen der Kanten etwas zu vergrößern.

3 Kondensatoren beliebiger Geometrie

3.1 Kleine und mittlere Frequenzen

Für kleine und mittlere ω läßt sich die Impedanz $Z = U_0/I = 1/I$ bis zur Größenordnung von k^4 genau in die Form

$$Z = \frac{\rho}{(k^2 P(1 + Qk^2 + W\bar{k}^2))} \tag{3.1}$$

bringen.

Dabei sind P, Q und W Größen, die *nur von der Geometrie des Kondensators* , also *nicht von der Frequenz* der an den Kondensator angelegten Wechselspannung abhängen.

Zum Beweis entwickeln wir $U(\vec{r}, k^2, \bar{k}^2$ für nicht zu große $|k^2R^2|$ (präziser für $|k^2R^2| \ll 1$) nach Potenzen von k^2 bzw. $\bar{k}^2$:

$$U(\vec{r}, k^2, \bar{k}^2) = U_0(\vec{r}) + k^2 U_1(\vec{r}) + \bar{k}^2 U_2(\vec{r}). \tag{3.2}$$

Dabei sind $U_n(\vec{r})$, für $n = 0, 1, 2$ reelle Feldfunktionen. Einsetzen von (3.2) in $Z = 1/I$ führt mit (1.7) zu (3.1). Dabei wurden die Symbole

$$P := \iiint_B U_0(\vec{r})dV,\ Q := \iiint_B U_1(\vec{r})dV,\ W := \iiint_B U_2(\vec{r})dV \tag{3.3}$$

verwendet.

Bemerkung:

Im Fall der Kreissymmetrie führen wir die Bezeichnungen

$$P = pHR^2,\ Q = qR^2 \text{ und } W = wR^2 \tag{3.4}$$

ein. Dabei sind p, q und w nur noch von Winkeln und Quotienten von Längen, also *dimensionslosen* Größen, abhängig.

Beispiele :

1. Beim langen ungeschlitzten KZK (Abschnitt 4.1) ist w=0, während p und q nur noch vom Quotienten a aus Innen- und Außenradius abhängen.

2. Im Falle des langen M-fach geschlitzten KZK (Abschnitt 4.2) hängen diese Größen vom Öffnungswinkel α, der Spaltanzahl M und dem Quotienten a aus Innen- und Außenradius ab (Bilder 4.3 und 4.4).

Für mittlere ω folgt aus (1.8), daß die Kapazität $C = Pc$ (näherungsweise) eine Konstante C_0 ist:

$$C = Pc = C_0. \tag{3.5}$$

Diese Konstanz der Kapazität eines beliebigen Elektrolytkondensators, nicht nur des Tantal-Festkörper-Elektrolytkondensators, ist die Grundlage für dessen technische Anwendung.

Bemerkung 1:

Die Kapazität für kleine ω interessiert normalerweise den Praktiker nicht. Z. B. ist in Abschnitt 4.3 die Kapazität für $f \geq 10^{-3}s^{-1}$ praktisch konstant.(Der Verlauf für kleine f wird in den Bildern nur der Vollständigkeit halber mitgezeichnet).

Bemerkung 2:

Für einen nicht unwesentlichen Teilbereich des mittleren Frequenzintervalls gilt für den Widerstand S und den Verlustfaktor $\tan\delta$

$$S = \frac{\rho}{P}(Q - W + \frac{\gamma(\omega)}{c\rho\omega}) \tag{3.6}$$

und

$$\tan\delta = (Q - W)c\rho\omega + \gamma(\omega) \approx (Q - W)c\rho\omega + \tan\delta_{0x}\ . \tag{3.7}$$

Die Gültigkeit dieser leicht ableitbaren Beziehungen wird aus dem Kurvenverlauf (Bilder 4.8 und 4.9 im Abschnitt 4.3) deutlich. Daß die Gültigkeitsbereiche von (3.5) bis (3.7) so verschieden sind, hängt mit der Singularität von $\gamma(\omega)$ an $\omega = 0$ (s. (1.5)) zusammen.

3.2 Große Frequenzen

Für *große Frequenzen* berechnet sich die Impedanz nach [4] für eine große Vielfalt geometrischer Formen von Kondensatoren zu

$$Z = \frac{\rho}{ikA_B}\ . \tag{3.8}$$

Dabei ist A_B der Flächeninhalt der Oberfläche von Γ_1. Γ_1 ist die Elektrode, an der das Potential 1 anliegt (präzis: die sinusförmige Wechselspannung der Kreisfrequenz ω der Amplitude U_0, die oben auf 1 normiert wurde). Physikalisch entspricht (3.8) dem Skineffekt.

Bemerkung

Von den beiden möglichen Werten für k, die sich aus (1.4) ergeben, ist der mit $\mathrm{Re}\, k > 0$ auszuwählen. Nur so erhalten wir für die Kapazität C und den Widerstand S positive Größen, wie es physikalisch sein muß.

Aus (3.8) folgt nach (1.8)

$$C \sim \omega^{-1/2},\ S \sim \omega^{-1/2} \text{ und } \tan\delta = 1 - \epsilon \tag{3.9}$$

für $\epsilon > 0$.

3.3 Der Übergang von mittleren zu großen Frequenzen

Nach dem hier verwendeten Lösungsverfahren des Randwertproblems (1.1) bis (1.3) ist der Verlauf der Kurven von C, S und $\tan\delta$ als Funktionen von f nach Abschnitt 3.1 nur für

(kleine und) mittlere f und nach Abschnitt 3.2 nur für große f garantiert. Die (genäherten) Funktionswerte im dazwischenliegenden Bereich müssen nach einer Matching-Prozedur - etwa nach LAGERSTROM [10] oder nach FRAENKEL [9] - gewonnen werden, die z. B. glatten Übergang und Verträglichkeit mit (1.1) bis (1.3) garantiert.

Der auffallend geradlinige Verlauf von C(f) auf doppelt logarithmischem mm-Papier in den Bildern 4.6 und 4.7 legt nahe, beide Geraden - über ihren eigentlichen Gültigkeitsbereich hinaus - zu verlängern und die Grenzfrequenz f_G als Abszisse der Schnittstelle zu gewinnen.

Wir beschreiben nun, wie wir den (glatten) Anschluß für S(f) erhielten. Sei $y := \lg S, x := \lg f$. Der gesuchte Kurvenverlauf $y = y(x)$ sei für mittlere f

$$y(x) \approx y_u(x) \text{ für } x \leq x_1 \text{ und } y(x) \approx \bar{y}(x) \text{ für } x \leq x_2 \tag{3.10}$$

für große f, wobei $y_u(x)$ bzw. $\bar{y}(x)$ den Kurvenverlauf für mittlere bzw. große Frequenzen darstellen. x_1 und x_2 sind dabei solche Werte von x, für die die oben gewonnenen Beziehungen für mittlere und große f noch genügend genau gelten. Das Symbol " $\approx$ " soll dabei bedeuten: 1.Übereinstimmung der y-Werte mit einer Genauigkeit von p% (z. B. 3%), 2. Übereinstimmung von $y'(x)$ mit q% Genauigkeit (z. B. 5%).

Für $x_1 < x < x_2$ wurde $y(x)$ aus dem Polynomansatz

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 \tag{3.11}$$

ermittelt. (Ansatz als Polynom dritten Grades, da der Graph zu $y = y(x)$ einen Wendepunkt haben muß). Die Konstanten a bis d wurden aus den zu $y_u(x_1), y_u'(x_1), y(x_2), y'(x_2)$ gehörigen Wertepaaren bestimmt.

Die Funktion $(\tan\delta)(f) = 2\pi f C S$ wurde aus obigen Funktionen $S(f)$ und $C(f)$ gewonnen.

Die durch Matching-Prozeduren hergestellten Kurvenstücke, z. B. $y = y(x)$ für $x_1 < x < x_2$, wurden in den Bildern 4.6 und 4.7 punktiert.

Bemerkung: Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, stört der Stilbruch : Bei der Ermittlung von f_G wird nur Stetigkeit gefordert, während bei der $S(x)$-Bestimmung die Glattheit eine Rolle spielt. Die theoretische Rechtfertigung dieser Prozedur ist in Bearbeitung. Für den langen ungeschlitzten Kreiszylinderkondensator besteht jedenfalls gute Übereinstimmung mit den exakten Werten.

3.4 Eine Abschätzung der Kapazität für mittlere Frequenzen

Für die Kapazität eines Tantal-Festkörperelektrolytkondensators (kurz Tt-FEK) beliebiger geometrischer Form (bei sonst gleichen Bedingungen, wie Volumen, Materialkonstanten usw.) kann man für den Bereich mittlerer Frequenzen einen größten Wert angeben:

Die in (3.2) eingeführte Funktion $U_0(\vec{r})$ genügt nach (1.1) bis (1.3) dem elliptischen Randwertproblem

$$\Delta U_0 = 0,\ U_0|_{\Gamma_1} = 1 \text{ und } U_0|_{\Gamma_2} = 0\,. \tag{3.12}$$

Nach dem Maximumprinzip wird das Extremum der reellen Funktion $U_0(\vec{r})$ auf dem Rand angenommen . Also gilt

$$0 \leq U_0(\vec{r}) \leq 1. \tag{3.13}$$

Daraus folgt nach Volumenintegration über den Bereich B mit (3.3) und

$$V_{SK} = \iiint_B dV$$

$$0 \leq P \leq V_{SK}\,. \tag{3.14}$$

Seien P_1 und P_2 zu zwei Kondensatoren gleichen Sinterkörpervolumens V_{SK} und gleicher spezifischer Kapazität c aber verschiedener geometrischer Form gehörige Werte.

Dann gibt wegen $C_0 = Pc$ der Koeffizient η

$$\eta := \frac{C_{02}}{C_{01}} = \frac{P_2}{P_1} \tag{3.15}$$

die Vergrößerung (bzw. Verkleinerung) der Kapazität des Kondensators 2 gegenüber dem Kondensator 1 an. Wir wollen hier η den *Effektivitätskoeffizienten* nennen. (Ein besseres Wort ist willkommen!).

Die durch Änderung der geometrischen Gestalt erreichte *Einsparung an Tantal-Material* μ ist dann

$$\mu = 1 - \frac{1}{\eta} \tag{3.16}$$

Folgerung aus (3.14) und (3.15):

Durch „bloße Änderung" der geometrischen Gestalt läßt sich - bei sonst gleichen Bedingungen - die Kapazität eines beliebigen FEK maximal auf das

$$\eta_{max} = \frac{V_{SK}}{P} - fache \tag{3.17}$$

steigern.

3.5 Kondensatorgeometrie und Kondensatoreigenschaften

Auf der Suche nach FEK mit günstigen Eigenschaften wurde eine Reihe von Kondensatoren verschiedener geometrischer Form analytisch und numerisch (Differenzenverfahren) untersucht. Eine Übersicht gibt die Tabelle Bild 3.1.

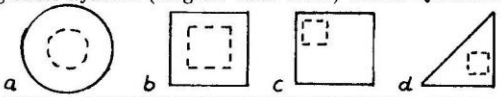
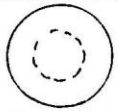
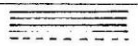
Nr.	Gestalt (— Pot. 1, - - - Pot. 0)	Bemerkungen	Literatur
1	gerader Zylinder (lang od. endl. Höhe) versch. Querschn. 	a,b num. realisiert	[13]
2	endl. langer KZK (R,H, Innenr. → 0), Oberfl. Pot. 1	analyt. bis C(f) usw.	[12]
2a	wie 2, aber Innenrad. $aR \neq 0$, Innenfl. Pot. 0	analyt. bis U(r,f)	[12]
3	langer KZK mit H, R, $aR \neq 0$ 	analyt.(exakt/matching)	hier: 4.1
4	flacher Kond.(muß nicht eben sein, z. B. Nr. 5)	analyt.(ex./match.)	hier: 6.1
5	Kugelkondensator (Radien R, aR), auß. Pot. 1, inn. Pot. 0	analytisch	
6	lang. Kond.,rechteckige Grundfläche	analyt., Z berechn.	[4]
7	M-fach geschlitzter KZK s. Bild 4.1	anal.: match.	hier: 4
7a	wie 7, für M=1	an./match., num.	[4]
8	flacher mehrf. geschl. Kondensator 	analytisch	hier: 6.1

Bild 3.1: Übersicht durchgerechneter Kondensatorgeometrien

Bemerkung

Für die FEK Nr. 2, 3 und 7 liegen numerische Erfahrungen vor (s. [3]).

Es zeigte sich, daß Änderungen der geometrischen Form der Kondensatoren 1 bis 6 - egal, ob es sich um Kondensatoren beliebiger Gestalt oder um lange Kondensatoren handelt - bei gleichem Anodenkörpervolumen nur geringe Auswirkungen auf die untersuchten Kondensatorgrößen η, C_0, S und $\tan\delta$ haben. Dagegen führt das Schlitzen bei den Kondensatoren 7 und 8 zu größeren Änderungen. Daß sich η wesentlich ändert, ist nach (3.13) und (3.14) plausibel: Damit der Zahlenwert von P nahe dem Zahlenwert von V_{SK} ist, muß $U(\vec{r})$ auf möglichst vielen Punkten des Sinterkörpers nahe 1 sein. *Das führt zur praktischen Konsequenz, möglichst viele kontaktierte Elektroden mit dem Potential 1 einzuführen.* Das ist vor allem in der Praxis dann bedeutsam, wenn die Tantal-Festkörperelektrolytkondensatoren relativ groß sind: Dann wird für jeden Kondensator viel Tantal benötigt, anderseits läßt sich der poröse Sinterkörper dann besser schlitzen.

4 Aussagen für lange Kondensatoren

Der mathematischen Einfachheit halber wird hier der - in der Praxis oft realisierte - *lange Kondensator* (vgl. Abschnitt 2) untersucht.

4.1 Der lange ungeschlitzte Kreiszylinderkondensator (KZK)

Der lange KZK habe den Außenradius R, den Innenradius aR und die Höhe H. Gegenüber dem realen KZK im Bild 0.1 sei der (dort strichlierte) Elektrodendraht mit dem Radius aR bis zur Deckfläche durchgezogen. Der Einfluß des Anschlußdrahtes werde vernachlässigt. Das Randwertproblem (1.1) bis (1.3) geht dann über in

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + k^2\right)U(r) = 0, \tag{4.1}$$

$$U(R) = 1 \text{ und } U(aR) = 0. \tag{4.2}$$

Die Lösung lautet nach [4]

$$U(r) = \frac{N_0(kaR)I_0(kr) - I_0(kaR)N_0(kr)}{N_0(kaR)I_0(kR) - I_0(kaR)N_0(kR)}. \tag{4.3}$$

Nach (3.3) und (3.17) ergibt sich daraus für mittlere Frequenzen

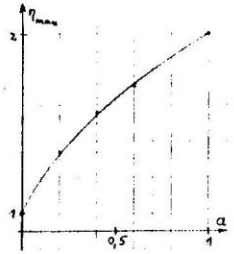
$$P = \pi\left(1 + \frac{1-a^2}{2\ln a}\right)HR^2, \tag{4.4}$$

$$Q = \frac{1}{8}\,\frac{1 + (\ln a)^{-1}(7/4 - a^2 - 3a^4/4) + ((1-a^2)/\ln a)^2}{1 + (1-a^2)/(2\ln a)}\,R^2 \tag{4.5}$$

und

$$\eta_{max} = \eta_{max}(a) = \frac{1-a^2}{1 + (1-a^2)/(2\ln a)}. \tag{4.6}$$

Die letzte Gleichung sagt aus, wie sehr man günstigstenfalls bei einem langen KZK gleichen Volumens und Materials durch bloße Geometrieänderung die Kapazität erhöhen kann. η_{max} *ist nur vom Quotienten a aus Innen- und Außenradius abhängig* (Bild 4.1). Die Materialeinsparung $\mu = \mu(a)$ kann dabei, wie Bild 4.2 zeigt, (im Grenzfall a → 1) maximal 50% betragen.



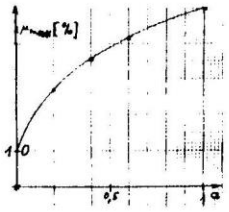


Bild 4.1 bzw. **Bild 4.2:** Maximale Kapazitätserhöhung η_{max} bzw. maximale Materialeinsparung μ_{max} eines beliebig geformten langen FEK gegenüber einem *langen* KZK als Funktion vom Quotienten a aus Innen- und Außenradius

Bemerkung

Das Ergebnis $\eta_{max} \to 2$ mit $a \to 1$ und die maximale Materialeinsparung sind offensichtlich unabhängig von der konkreten Wahl der Beziehung $\gamma = \gamma(\omega)$ in Gleichung (1.5).

Bisher wurde nicht erörtert, wie man die Geometrie des langen KZK modifizieren kann, um maximale Kapazitäten bzw. maximale Materialeinsparungen zu erzielen. Das soll in Abschnitt 4.2 geschehen.

4.2 Der lange M-fach geschlitzte Kreiszylinderkondensator

4.2.0 Einleitende Bemerkungen

Der lange KZK werde mit M gleichartigen parallel zur Symmetrieachse liegenden Schlitzen versehen (s. Bild 4.3). Diese seien keilförmig angeordnet mit dem Öffnungswinkel 2α je Spalt. Mathematisch leichter ist dies für genügend tiefe Spalte. Sei etwa

$$\epsilon := \frac{R_z - aR}{R - aR}, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \tag{4.7}$$

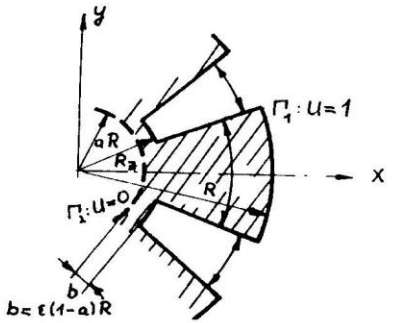


Bild 4.3: Grundriß des M-fach geschlitzten KZK

Solange von einem *Durchschlagen* abgesehen werden, also etwa die Beziehung

$$(R_z - aR) > Spannung\ am\ FEK/E_{krit} \tag{4.8}$$

erfüllt ist, ist die Idealisierung $\epsilon = 0$ des bis zur Katode durchgeschlitzten KZK verwendbar.(E_{krit} ist dabei die kritische elektrische Feldstärke). Betrachtungen zu dem Fall $\epsilon \neq 0$ befinden sich im Abschnitt 4.2.4.

Bemerkung 1:

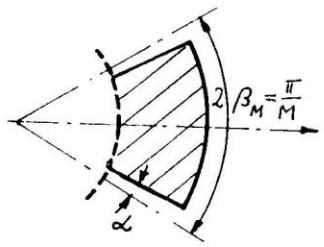
Es reicht aus, *eine* der M Lamellen zu untersuchen (Bild 4.4). Die Berechnung des Gesamtstromes I des KZK erfolgt durch Multiplikation des Stromes I_{Lam} in einer Lamelle mit dem Faktor M. Nach Abschnitt 3.1 gilt dann für den geschlitzten KZK mit (3.4)

$$P = M\ P_{Lam},\ Q = Q_{Lam},\ W = W_{Lam}\ . \tag{4.9}$$

Daraus können die den Anwender interessierenden Größen C, S, $\tan\delta$ bzw. η als Funktion der Frequenz gewonnen werden.

Bemerkung 2:

Wie Bild (4.5) zeigt, besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Betrachtung *einer* Lamelle und einem nur *einmal* geschlitzten KZK.



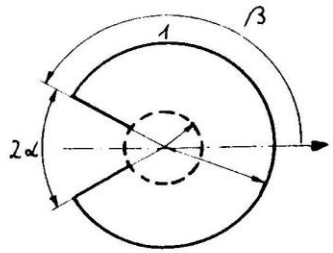


Bild 4.4: Eine Lamelle des M-fach bis zur Elektrode durchgeschlitzten KZK

Bild 4.5: Bis zur Elektrode durchgeschlitzter KZK mit *einem* Spalt

Folgerung

Die in [4] für einen einspaltigen KZK durchgeführten aufwendigen Rechnungen lassen sich auf den M-fach geschlitzten KZK übertragen, indem man

$$\beta = \pi - \alpha \text{ durch } \beta_M = \frac{\pi}{M} - \alpha$$

ersetzt und (4.9) berücksichtigt.

4.2.1 Der bis zur Katode durchgeschlitzte KZK: I. Das Lösungsverfahren

Wir betrachten nun eine der M Lamellen des bis zur Katode durchgeschlitzten KZK. Sie liege symmetrisch zur Abszisse (Bild 4.4).

Man möchte daran denken, die Gleichungen (1.1) bis (1.3) - zumindest für nicht exakt lösbare Probleme - mit dem Ansatz

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} U_i (k^2)^i$$

zu bearbeiten. Dann ist nach Koeffizientenvergleich in $(k^2)^i$

$$\Delta U_0 = 0,\ U_{0|\Gamma_1} = 1,\ U_{0|\Gamma_2} = 0$$

und für i=1, 2, ...

$$\Delta U_i = -U_{i-1},\ U_{i|\Gamma_1} = U_{i|\Gamma_2} = 0\ .$$

Problematisch ist dabei das Anpassen der Lösungen der inhomogenen partiellen Differentialgleichungen an die Randbedingungen.

Wir arbeiten in folgenden *Schritten:*

Schritt 1:

Durch Einführung von Polarkoordinaten gehen die Gleichungen (1.1) bis (1.3) über in

$$(\Delta + k^2)U := (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2)U(r,\varphi) = 0 \ , \tag{4.10}$$

$$U(R,\varphi) = 1 \ , \tag{4.11}$$

$$U(aR,\varphi) = 0 \ , \tag{4.12}$$

$$U(r,\beta_M) = 1 \ . \tag{4.13}$$

Dabei gilt

$$0 \leq \varphi < \beta_M \tag{4.14}$$

und

$$aR < r \leq R \ . \tag{4.15}$$

Bemerkung 1:

In (4.14) und (4.15) steht das Symbol $<$ wegen des Potentialsprungs .

Bemerkung 2:

Aus Symmetriegründen ist die Beschränkung auf nichtnegative φ möglich.

Schritt 2:

Das oben angeführte Randwertproblem (RWP) wird aufgespalten:

$$U(r,\varphi) = U^I(r,\varphi) + U^{II}(r,\varphi), \tag{4.16}$$

wobei U^I dem RWP

$$(\Delta + k^2)U^I = 0 \ , \ U^I(aR,\varphi) = 0 \ , \ U^I(R,\varphi) = 1 \ , \ U^I(r,\beta_M) = 0 \tag{4.17}$$

und U^{II} dem RWP

$$(\Delta + k^2)U^{II} = 0 \ , \ U^{II}(aR,\varphi) = 0 \ , \ U^{II}(R,\varphi) = 0 \ , \ U^{II}(r,\beta_M) = 1 \tag{4.18}$$

genügen soll.

Schritt 3:

Jedes Teil-RWP (4.17) und (4.18) wird für sich mit dem Produktansatz

$$U(r,\varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \tag{4.19}$$

gelöst durch Einsetzen in die partiellen Differentialgleichungen

$$(\Delta + k^2)U = 0 \ .$$

(Wir lassen die Hochzahlen I und II weg). Die so entstehenden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \lambda^2)\phi = 0 \ , \tag{4.20}$$

$$(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} + (1 - \frac{\lambda^2}{\rho^2}))\ R = 0 \text{ mit } \rho := kr \tag{4.21}$$

werden den Randbedingungen angepaßt. Das führt zu zwei Eigenwertproblemen mit den Eigenwerten λ_n, $n \in \Gamma$. U^I bzw. U^{II} berechnen sich daraus nach

$$U(r,\varphi) = \sum_n R_{\lambda_n}(r) \cdot \Phi_{\lambda_n}(\varphi) \ . \tag{4.22}$$

Schritt 4:

Berechnung von $U(r,\varphi)$ nach (4.16).

Bemerkung:

Das RWP (4.17) führt auf bekannte Weise zu der Bedingung

$$\cos(\lambda^I \cdot \beta_M) = 0$$

mit Eigenwerten λ_n^I , $n \in \Gamma$ und einem vollständigen, orthogonalen System von Eigenfunktionen (Winkelfunktionen).

Das RWP (4.18) ergibt nach der Bedingung

$$J_\lambda(kaR)\ J_{-\lambda}(kR) - J_\lambda(kR)\ J_{-\lambda}(kaR) = 0 \tag{4.23}$$

komplexe Eigenwerte λ_n^{II}, $n \in \Gamma$. Die resultierenden Besselfunktionen haben daher **komplexen** Index und, da k komplex ist, auch komplexes Argument. Sie werden in [4] mit dem Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren behandelt.

Im nächsten Abschnitt gehen wir auf einige dabei bemerkenswerte Besonderheiten ein.

4.2.2 Der bis zur Katode durchgeschlitzte KZK: II. Ausführungen zur Lösung des Randwertproblems (4.18)

Wir besprechen nun das Lösen von (4.18) genauer. Die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen (4.20) und (4.21) führen mit $\lambda = i\tau$ zu den Fundamentallösungen $\cosh \tau\varphi$, $\sinh \tau\varphi$ bzw. $J_{i\tau}(kr)$, $J_{-i\tau}(kr)$.

Wegen der Symmetrie steht in der Lösung von (4.19) nur

$$\Phi_\tau(\varphi) = \cosh \tau\varphi \ ,$$

während die allgemeine Lösung von (4.21)

$$R_\tau(r) = C_1 J_{i\tau}(kr) + C_2 J_{-i\tau}(kr) \tag{4.24}$$

lautet.

Einschub 1

Wir betrachten nun die Lösung von (4.18) in *nullter Näherung von* k^2. (4.21) geht dann nach Multiplikation mit k^2r^2 in die Eulersche Differentialgleichung

$$(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r\frac{d}{dr} + \tau^2)R_\tau = 0 \tag{4.25}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$R_\tau(r) = C_1 \cos(\tau \ln r) + C_2 \sin(\tau \ln r) \tag{4.26}$$

über.

Die zweite und dritte Gleichung von (4.18) führen wegen (4.19) zu den Beziehungen $R_\tau(aR) = R_\tau(R) = 0$. Sie sind nichttrivial lösbar, wenn $\sin(\tau \ln a) = 0$. Die Eigenwerte τ_m und die zugehörigen Eigenfunktionen lauten

$$\tau_m = \frac{m\pi}{T} \ , \ m \in \Gamma \ \textit{und} \ e^{i\tau_m z} \ . \tag{4.27}$$

Dabei wurden die Größen $T := -\ln a$ und $z := \ln r$ eingeführt. *Die letzte Gleichung von (4.18) ist also wegen (4.22) eine Fourierentwicklung bezüglich* z, wenn wir $U^{II}(r, \beta_M)$ in z periodisch fortsetzen, etwa in der Form

$$U^{II}(r, \beta_M) = 1 \ , \ -T < z < 0 \text{ und } U^{II}(r, \beta_M) = -1 \ , \ 0 < z < T \ . \tag{4.28}$$

Einschub 2

Aussage über die Existenz von Eigenwerten

Für

$$|\frac{\tau^2}{k^2r^2}| \gg 1$$

geht (4.21) in die Eulersche DG (4.25) über. Daher darf man annehmen, daß (4.21) ebenso wie (4.25) abzählbar unendlich viele Eigenwerte hat. Das müßte noch näher untersucht werden.

Wir setzen nun die am Beginn des Abschnitts 4.2.2 begonnenen allgemeinen Überlegungen fort.

Die logisch einfachste Variante der Lösung des Problems wäre:

Schritt 1: Reihenentwicklung der Besselfunktion $J_{i\tau}(kr)$. Mit $z := \ln r$ entsteht mit $\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu)$

$$J_{i\tau}(kr) = (\frac{k}{2})^{i\tau} \cdot \frac{1}{\Gamma(1+i\tau)} \cdot e^{i\tau z}[1 - \frac{k^2r^2}{4(1+i\tau)} + \frac{k^4r^4}{32(1+i\tau)(2+i\tau)} - + ...] \tag{4.29}$$

Schritt 2: Einsetzen in die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte τ

$$J_{i\tau}(kaR)\ J_{-i\tau}(kR) - J_{i\tau}(kR)\ J_{-i\tau}(kaR) = 0 \ . \tag{4.30}$$

und Ermittlung von τ .

Schritt 3: Aufschreiben der letzten Gleichung von (4.18), Fortsetzen auf das Intervall $0 < z < T$ ergibt

$$\sum_\tau \cosh(\tau\beta_M)(C_1 J_{i\tau}(kr) + C_2 J_{-i\tau}(kr)) = 1 \ , \ -T < z < 0 \ \textit{bzw.} \ = -1 \ , \ 0 < z < T \ . \tag{4.31}$$

Dies ist periodisch fortzusetzen für alle reellen z und die Fourierentwicklung durchzuführen. (Vgl. Einschub 1).

In [4] wurde das Problem auf dem in Abschnitt 4.2.3 zu beschreibenden Weg gelöst.

4.2.3 Der bis zur Katode durchgeschlitzte KZK: III. Lösung mittels Orthogonalisierung nach E. Schmidt

Wir spalten zunächst von $J_{i\tau}(kr)$ in (4.29) den r-unabhängigen Ausdruck ab, indem wir schreiben

$$J_{i\tau}(kr) = A(i\tau) \cdot I_\tau(r) \ , \tag{4.32}$$

wobei gesetzt wurde

$$A(i\tau) := (\frac{k}{2})^{i\tau} \cdot \frac{1}{\Gamma(1+i\tau)} \ ,$$

$$I_\tau(r) := e^{i\tau z}[1 - \frac{k^2r^2}{4(1+i\tau)} + \frac{k^4r^4}{32(1+i\tau)(2+i\tau)} - + ...] \ . \tag{4.33}$$

Betrachten nun vorübergehend $x := kr$ und τ als reelle Größen, um $I_\tau(r)$ zu zerlegen:

$$I_\tau(r) = \Phi_- + i\Phi_+ \ , \ \Phi_- := \ \mathrm{Re}\ I_\tau(r) \ , \ \Phi_+ := \ \mathrm{Im}\ I_\tau(r) \ . \tag{4.34}$$

So folgt

$$\Phi_- = \cos\tau z - \frac{k^2 r^2}{4(1+\tau^2)}(\cos\tau z + \tau\sin\tau z)$$

$$+\frac{k^4 r^4}{32(1+\tau^2)(4+\tau^2)}[(2-\tau^2)\cos\tau z + 3\tau\sin\tau z] - \dots .$$

Für Φ_+ entsteht ein analoger Ausdruck.

Schreiben nun statt (4.24) die Beziehung

$$R_\tau(r) = C_-\Phi_-(r) + C_+\Phi_+(r) . \tag{4.35}$$

Ermitteln nun durch Gleichsetzung von (4.24) und (4.35) C_- und C_+ .

Die zweite und dritte Gleichung von (4.18) führen zu $R_\tau(aR) = R_\tau(R) = 0$, woraus für die Eigenwerte τ die Bestimmungsgleichung

$$\Phi_-(kaR)\cdot\Phi_+(kR) - \Phi_-(kR)\cdot\Phi_+(kaR) = 0$$

resultiert. In [4] werden diese Eigenwerte

$$\tau_m = \tau_m^{(0)} + k^2\cdot\tau_m^{(1)} + k^4\cdot\tau_m^{(2)} \tag{4.36}$$

explizit angegeben. Einsetzen von (4.36) in Φ_- und Φ_+ ergibt die Eigenfunktionen Φ_{-m} und Φ_{+m}.

Die letzte Gleichung von (4.18) liefert damit die Beziehung

$$\sum_m (C_{-m}\Phi_{-m}(r) + C_{+m}\Phi_{+m}(r))\cosh(\tau_m\beta_M)) = 1 \tag{4.37}$$

In [4] wurde bis $O(k^4)$ genau gearbeitet, die Eigenfunktionen vor dem Einsetzen orthogonalisiert und dabei die sich aus Einschub 1 ergebenden Vereinfachungen (betreffs der Fourierentwicklung in $z = \ln r$) berücksichtigt. Wir diskutieren weiter unten nur die Ergebnisse.

Bemerkung 1:

Bei der Orthogonalisierung der Φ-Funktionen treten die inneren Produkte

$$(\Phi_j, \Phi_l) := \int_{-T}^{T} \bar{\Phi}_j(z)\Phi_l(z)\, dz \ , \ mit\ i,j \in \Gamma \tag{4.38}$$

auf. Daher kommt es, daß U^{II} in den Beziehungen (3.1) und (3.2) von k^2 abhängt.

4.2.4 Die Betrachtung des Einflusses vom Spaltpotential

Für relative Schlitztiefen $\epsilon \ll 1$ (Bild 4.3), in der Praxis für $\epsilon < 1/4$, kann der bis zur Katode durchgeschlitzte KZK der letzten beiden Abschnitte als gute Näherung betrachtet werden. Das wird durch physikalische Betrachtungen und numerische Experimente plausibel.

Physikalische Überlegungen:

Sei

$$0 < \epsilon \ll a \tag{4.39}$$

und

$$\epsilon(1-a) \ll 2a\alpha . \tag{4.40}$$

Dann kann der im schraffierten Bereich von Bild 4.3a, bzw. der in Bild 4.3b nochmals skizzierte Ausschnitt, als flacher Zylinderkondensator mit den Abmessungen $2a\alpha R$ mal $\epsilon(1-a)R$ mal H gedeutet werden.

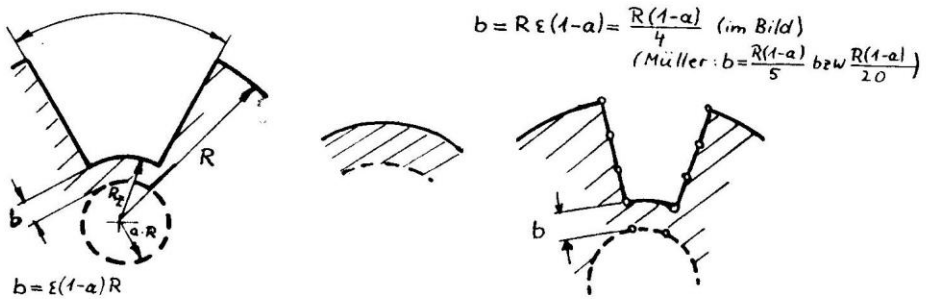


Bild 4.3a: Ein Ausschnitt von Bild 4.3 **Bild 4.3b**: Ein Ausschnitt von Bild 4.3a **Bild 4.3c**: Diskretisierung beim numerischen Experiment

Eine Lamelle des realen Kondensators (Bild 4.3), Index sei 1, entsteht durch *Parallelschaltung* einer geschlitzten Kondensatorlamelle (Bild 4.4) (zugehörige elektrische Kenngrößen seien nicht indiziert) mit dem Flachkondensator von Bild 4.3b (Index sei 2). Also gilt für die dazugehörige Impedanz Z

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} .$$

Nach (3.1) folgt daraus

$$P(1 + Qk^2 + Wk^2) = P_1(1 + Q_1k^2 + W_1k^2) + P_2(1 + Q_2k^2 + W_2k^2) ,$$

wobei für P, Q und W

$$P := P_1 + P_2 \ , \ Q(P_1 + P_2) := P_1Q_1 + P_2Q_2 \ , \ (P_1 + P_2)W := P_1W_1 + P_2W_2 \tag{4.41}$$

gilt (erhalten durch Koeffizientenvergleich in k^0, k^2, k^2). Für nicht zu große Öffnungswinkel 2α kann der in Bild 4.3b symbolisierte Kondensator als eben und flach betrachtet werden. Dann gilt (s. Anhang)

$$P_2 = a\alpha\epsilon(1-a)\cdot R^2 H \ , \ Q_2 = \frac{1}{12}\epsilon^2(1-a)^2 R^2 \ , \ W_2 = 0 \ . \tag{4.42}$$

Wegen (4.40) sind P_2 bzw. Q_2 klein gegenüber P_1 und Q_1.

Bemerkung 1:

Falls (4.39) verletzt ist, kommt man u. U. mit anderen Kondensatormodellen als in Bild 4.3b skizziert weiter.

Bemerkung 2:

Bei diesen Betrachtungen ist die Voraussetzung wichtig, daß der Bereich B des Sinterkörpers *einfach zusammenhängend* ist. Nur so kann garantiert werden, daß die Größe k, berechnet nach (1.4), (1.5) und (4.43), wonach $g_r \sim 1/V_{SK}$ ist, in den parallel geschalteten Kondensatoren gleich ist.

Numerische Experimente:

Numerische Rechnungen, von MÜLLER [14] für einen einfach geschlitzten KZK durchgeführt, bestätigen den geringen Einfluß der Spalttiefe auf die elektrischen Kenngrößen. Das erhellt bereits ein Blick auf einige Gitterpunkte, die bei der Diskretisierung verwendet wurden (Bild 4.3c). Dabei wurde mit Netzen gearbeitet, die zum Spalt hin engmaschiger werden (s. [4] Abschnitt 8). Müller verwendete Netze von 5 mal 6 Maschen bzw. 20 mal 20 Maschen. Ansätze, den Begriff der Greenschen Funktion auf Diskretisierungsverfahren zu übertragen (WINDISCH [18]), stellen die Verfeinerung solcher Betrachtungen in Aussicht.

4.3 Zahlenbeispiele zu 4.1 und 4.2

Zu den Abschnitten 4.1 und 4.2 wurden u. a. Rechnungen für den ungeschlitzten und geschlitzten KZK für a=0,2; R=0,15 cm; H=0,7 cm; M=12 Spalte; $2\alpha = 2°$ mit den Materialkonstanten $\rho = 10\Omega\ cm$; $c = 2,5\cdot 10^{-4} F cm^{-3}$, und $\tan\delta_{0x} = 0,01$ durchgeführt.

g_r in (1.5) wurde nach einem Hinweis von Langer nach der Beziehung

$$g_r = \frac{1}{R_{is}\cdot c\cdot V_{SK}} \text{ mit } R_{is} = 2\cdot 10^7\Omega \tag{4.43}$$

ermittelt und die Kurven von C, S und $\tan\delta$ in Abhängigkeit von f in doppeltlogarithmischem Maßstab dargestellt: in Bild 4.6 für den ungeschlitzten und in Bild 4.7 für den geschlitzten KZK. Hierbei sind die durch Glättungsprozeduren gewonnenen Kurven punktiert dargestellt (s. Abschnitt 33). Die Bilder 4.8 und 4.9 enthalten daraus Teilkurven, die im linearen Maßstab dargestellt wurden.

Bild 4.6: Kapazität C, Ohmscher Widerstand R_S und Verlustfaktor $\tan\delta$ als Funktionen von der Frequenz f beim langen ungeschlitzten KZK für a=0,2

Bild 4.7: C, R_S und $\tan\delta$ als Funktionen von f beim langen geschlitzten KZK für a=0,2; M=12; $2\alpha = 2°$

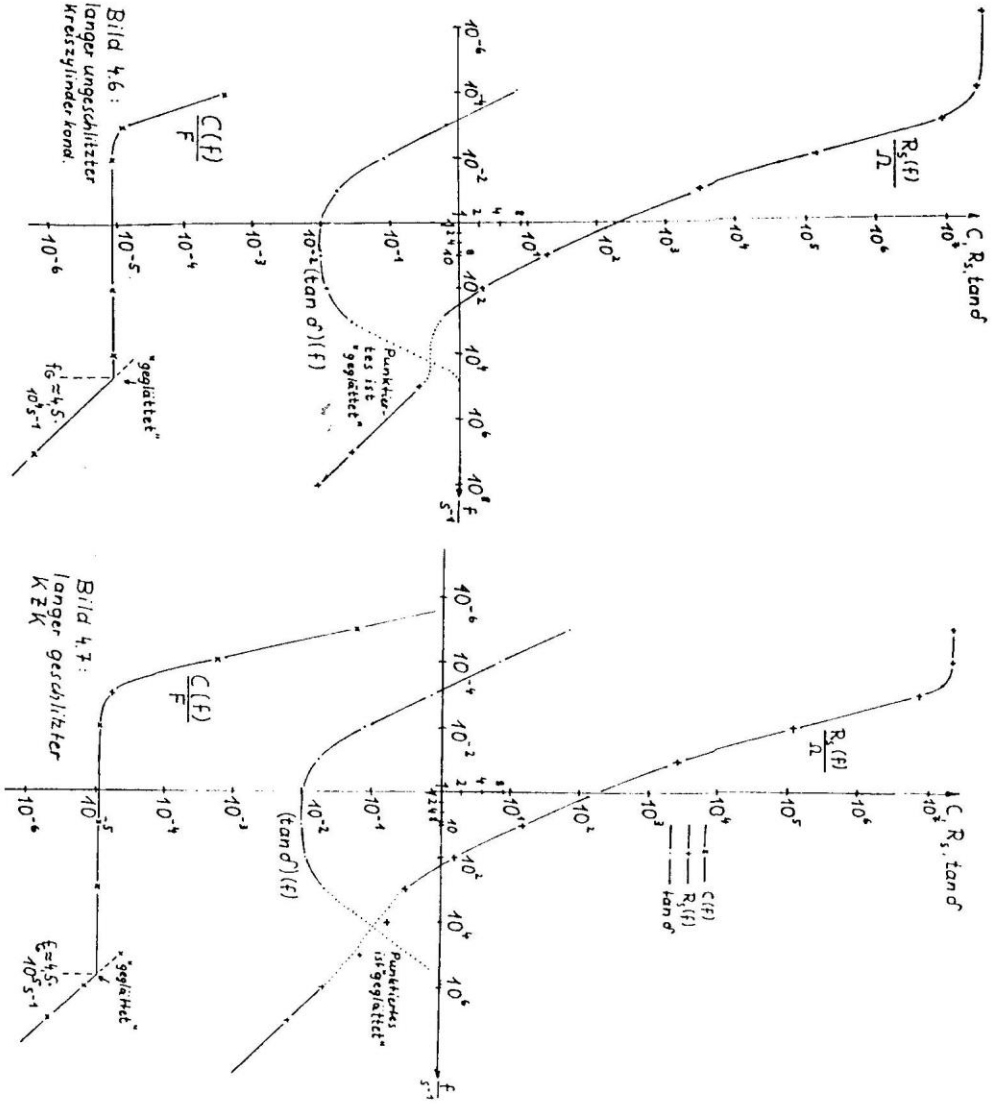
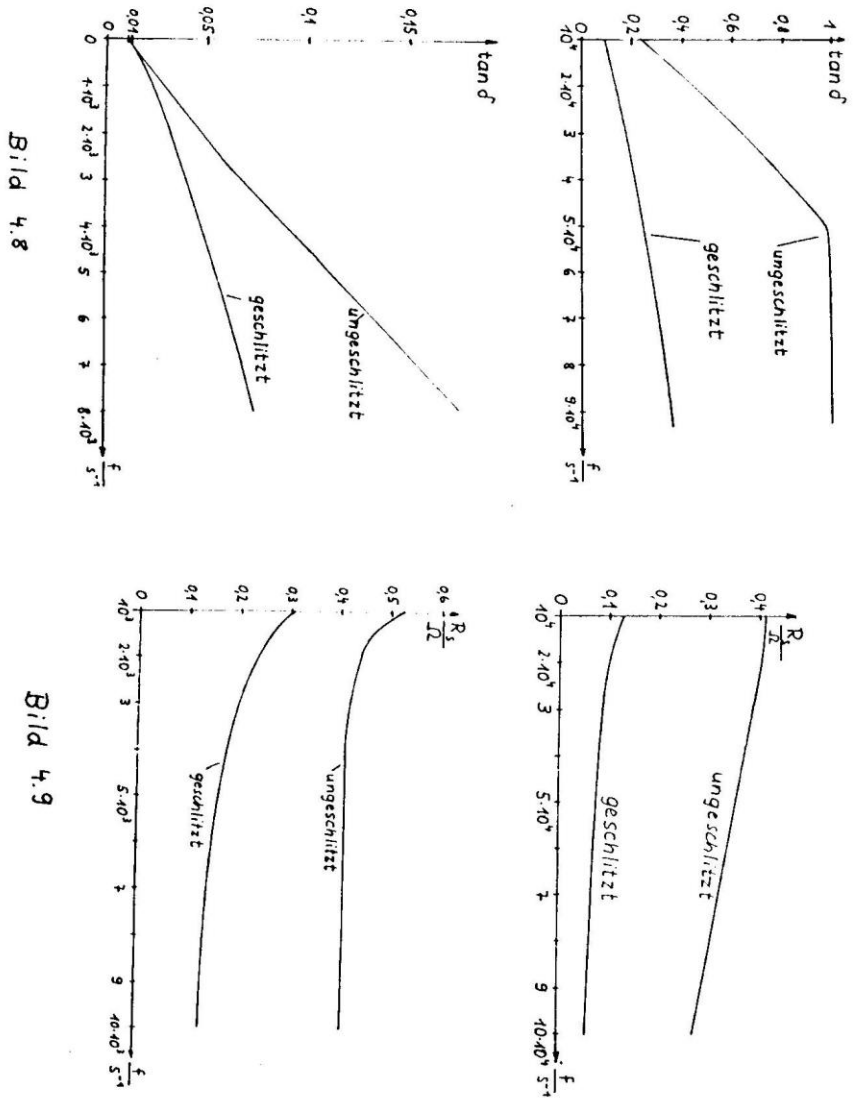


Bild 4.8: Der Verlustfaktor $\tan\delta$ als Funktion von f für den langen ungeschlitzten KZK und den langen geschlitzten KZK (wie bei den Bildern 4.6 und 4.7)

Bild 4.9: Der Ohmsche Widerstand R_S als Funktion der Frequenz f für den ungeschlitzten und den geschlitzten langen KZK (Vgl. Bilder 4.6 und 4.7)



4.4 Diskussion und Schlußfolgerungen

Der Vergleich der in den Abschnitten 4.1 bis 4.3 erhaltenen Resultate zeigt:

Durch das Einfügen von Schlitzen in den langen KZK werden einige elektrische Kenngrößen im Interesse der Anwender günstig verändert. Die Änderungen sind abhängig von der Anzahl M der Schlitze, dem Öffnungswinkel 2α, dem Quotienten a aus Innen- und Außenradius, der Schlitztiefe $R_Z - a \cdot R$ und natürlich von den Materialkonstanten. Ist der Schlitz jedoch genügend tief, d. h. nach (4.39) $\epsilon \ll 1$, so kann sein Einfluß vernachlässigt werden.

Im Einzelnen sind folgende **Ergebnisse** zu verzeichnen:

1. Durch das Schlitzen wird der Frequenzbereich fast konstanter Kapazität C_0 stark vergrößert. D. h. die Grenzfrequenz f_G, die etwa der kritischen Frequenz f_{krit} entspricht (s. Abschnitt 0) steigt an.(Nach den Bildern 4.6 und 4.7 ist das etwa der Faktor 10.) Dieser Effekt ist nicht neu und experimentell bestätigt (vgl. [8]).

2. Sind die Schlitze zu breit, dann wird die Kapazität C_{0g} für mittlere f gegenüber der Kapazität C_{0u} des ungeschlitzten KZK wegen der Verminderung des Volumens V_{SK} des Sinterkörpers stark ab. Gelingt es jedoch, M genügend schmale Schlitze einzufügen, also den Winkel 2α kleinzuhalten, so ist es - nach den vorliegenden theoretischen Untersuchungen - sogar möglich, bei gleichem Radius R, gleichem Innenradius $a \cdot R$ und gleicher Höhe H die Kapazität C_0 zu steigern: Im Idealfall nach (4.6) auf das

$$\eta_{max} = \frac{V_{SK}}{P} = \frac{1 - a^2}{1 + (1 - a^2)/(2 \ln a)} \quad - fache!$$

Letzteres trifft für den langen KZK zu, wenn die Schlitzanzahl $M \to \infty$ und der Öffnungswinkel $2\alpha \to 0$ geht. Die damit verbundene Materialeinsparung $\mu = 1 - 1/\eta$ kann dabei bis zu 25% (im natürlich nicht realisierbaren Grenzfall $a \to 1 - 0$ sind das sogar 50%) betragen. (In den Beispielen, Bilder 4.6 und 4.7, ist die Effektivität $\eta \approx 1,25$. Dem entspricht eine Tantaleinsparung von 20%).

Bemerkung 1:

Im Anhang wird durch Parallelschaltung flacher Kondensatoren also auf ganz anderem Wege gezeigt, daß der (in Abschnitt 3 behandelte) Effekt der Kapazitätsvergrößerung physikalisch tatsächlich existieren muß.

Bemerkung 2:

Bedingt durch die Feinheit der Poren des Sinterkörpers und die Beeinträchtigung seiner mechanischen Stabilität gibt es untere Grenzen für den Schlitzwinkel 2α und obere Grenzen für die Schlitzanzahl M. (Eine saubere Untersuchung dieser Einflüsse erfordert ein stochastisches mathematisches Modell!).

3. Durch das Schlitzen werden gleichzeitig für einen Teilbereich der mittleren Frequenzen, der technisch oft bedeutsam ist, der Ohmsche Widerstand S (in den Kurvenbildern R_S) und der Verlustfaktor $\tan\delta$ merklich verringert.(In den Bildern 4.8 und 4.9 ist das für Frequenzen von $10^3 s^{-1}$ bis $10^5 s^{-1}$ eine Verringerung auf den Faktor 1/2 bis 1/3 des Wertes von R_S bzw. $\tan\delta$).

5 Endlich lange Kreiszylinderkondensatoren

Für solche Festkörperkondensatoren sind erst quantitativ befriedigende Aussagen zu erwarten nach Lösung der Kondensatorgeometrie Nr. 2a von Bild 3.1 für $a \neq 0$ und der dreidimensionalen Lösung des Falls des endlich langen KZK.

Hier untersuchen wir nur die Fälle $(1-a) \ll 1$ und $a \ll 1$. Nach (3.17) ist für den endlich langen KZK der Abmessungen R, aR und H

$$\eta_{max} = \frac{V_{SK}}{P} = \frac{\pi(1-a^2)R^2H}{P} \tag{5.1}$$

auch noch für die Grenzfälle $a \to 0$ und $a \to 1-0$ angebbar.

5.1 Der dünnwandige KZK: $(1-a) \ll 1$

Seien R und H von gleicher Größenordnung. Dann ist der Tantal-FEK für $H \gg (1-a)R$ als flacher Kondensator der Fläche $2\pi RH$ und der Höhe $(1-a)R$ betrachtbar. D.h. wir vernachlässigen den Strom durch die Grund- und Deckfläche gegenüber dem Strom durch die Mantelfläche. Nach dem Anhang gilt für den Flachkondensator

$$P = \frac{1}{2} \cdot Flaeche \cdot Hoehe = \frac{1}{2} \cdot 2\pi RH \cdot (1-a)R = \pi(1-a)R^2H \ , \tag{5.2}$$

woraus nach (5.1)

$$\eta_{max} = 1 + a \ fuer \ 0 < 1-a \ll 1 \tag{5.3}$$

folgt, also $\eta_{max} \to 2$ für $a \to 1-0$ wie für den langen KZK.

5.2 Der KZK mit dünnem Katodendraht: $a \ll 1$

Die Verfasser konnten zeigen, daß für den KZK endlicher Höhe H mit dem Außenradius R für verschwindenden Innenradius die von LANGER angegebene komplizierte Beziehung (s. [12] Seite 103 Gleichung (149)) sich für $R/H < 3/4$ bei geringem relativen Fehler ($< 5\%$) radikal vereinfachen läßt zu dem in R/H linearen Ausdruck

$$P = \pi(1+\beta \cdot \frac{R}{H}) \cdot R^2H \ mit \ \beta = 8 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^3} \approx 0,647 \ . \tag{5.4}$$

Dabei sind α_i die Nullstellen der Besselfunktion $J_o(x)$. Also gilt für den Grenzfall

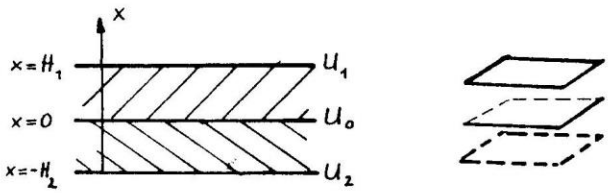
$$a \to +0 \ : \ \eta_{max} \approx \frac{1}{1+\beta R/H} \ . \tag{5.5}$$

6 Anhang: Eindimensionales Verständnis der Ergebnisse von Abschnitt 4

In diesem Abschnitt des Anhanges soll gezeigt werden, daß die beim geschlitzten FEK auftretenden physikalischen Effekte, die in Abschnitt 4 hergeleitet wurden, bereits im eindimensionalen Fall verstanden werden können.

6.1 Der geschlitzte flache Zylinderkondensator

Die N Elektroden seien (dünne!) parallele Leiterplatten, deren Flächen A groß gegenüber dem Quadrat ihres Abstandes s voneinander seien.(Es sei z. B. durch Anbohren der Leiterplatten dafür gesorgt, daß der sich zwischen den Platten befindende poröse Sinterkörper einen einfach zusammenhängenden Bereich B darstellt, damit g_r und damit k für den ganzen porösen Sinterkörper im Mittel den gleichen Wert haben. Vgl. Abschnitt 4.2.3 Bemerkung 2).



Bilder A1.1,A1.2: Geschlitzter flacher Zylinderkondensator für N=3 Elektroden

Dann ist das eindimensionale RWP

$$U''(x) + k^2U(x) = 0 \tag{6.1}$$

mit den Randbedingungen (hier für N=3 aufgeschrieben)

$$U(H_1-0) = U_1, \ U(+0) = U_0, \ U(-0) = U_0, \ U(-H_2+0) = U_2 \tag{6.2}$$

zu lösen.(Man beachte, daß für die innere Leiterplatte *zwei* Randbedingungen aufzuschreiben sind).

Die Gesamtstromstärke ergibt sich wegen der Stromdichte

$$j_l(x) = -\frac{dU_l(x)}{dx} \ , \ l = I, II \tag{6.3}$$

zu

$$I_{ges} = A(j_I(H_1-0) - j_I(+0) + j_{II}(-0) - j_{II}(-H_2+0)) \ , \tag{6.4}$$

woraus nach Taylorentwicklung der Winkelfunktionen bis zu Potenzen in k^4 genau über die Impedanz nach (3.1) P und Q folgen (W ist gleich Null). Z. B. führt $U_1 = U_0 = 1$ und $U_2 = 0$ zu

$$P = (H_1 + \frac{H_2}{2})A \,, Q = \frac{1}{12}\frac{2H_1^3 + H_2^3}{2H_1 + H_2}. \tag{6.5}$$

Weitere Ergebnisse sind in Bild A1.3 tabelliert. (Schlitzabstände wurden gleich gewählt).

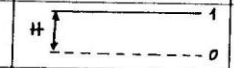
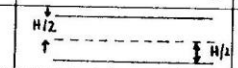
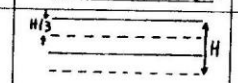
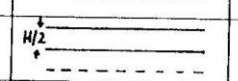
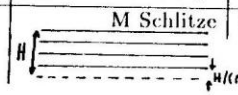
Nr.	Kondensatorgestalt	P	Q	η
1		$\frac{AH}{2}$	$\frac{H^2}{12} =: Q_1$	1
2		$\frac{AH}{2}$	$\frac{Q_1}{4}$	1
3		$\frac{AH}{2}$	$\frac{Q_1}{9}$	1
4		$\frac{3}{2} \cdot \frac{AH}{2}$	$\frac{Q_1}{4}$	$\frac{3}{2}$
5	M Schlitze 	$\frac{2M+1}{M+1} \cdot \frac{AH}{2}$	$\frac{Q_1}{(M+1)^2}$	$\frac{2M+1}{M+1}$

Bild A1.3: Tabelle einiger geschlitzter Flachkondensatoren

Die Tabelle macht deutlich: Durch Einfügen von M Leiterplatten mit dem Potential 1 kann die Kapazität C_0 des Kondensators Nr. 1 erhöht, maximal (für $M \rightarrow \infty$) verdoppelt werden, während der Ohmsche Widerstand S und der Verlustfaktor $\tan\delta$ wegen des kleiner werden Q stark abfallen gegen Null. Die Grenzfrequenz f_G nimmt wegen der mit M größer werdenden Fläche A_B, die das Potential 1 besitzt, zu.

Bemerkung 1:

Im Fall von Bild A1.2 ist $A_B = 3A$, da die innere Fläche doppelt zählt.

Bemerkung 2:

Die Ergebnisse der Tabelle sind durch Parallel- bzw. Hintereinanderschaltung von ungeschlitzten Flachkondensatoren (Kondensator Nr. 1 von Bild A1.3) erhaltbar: Z. B. erhält man Kondensator Nr. 4 durch Parallelschaltung von Kondensator Nr. 1 mit Plattenabstand H und Nr. 1 mit Plattenabstand H/2 .

Bemerkung 3:

Exakterweise müßte das oben angedeutete Anbohren der Leiterplatten in der Rechnung berücksichtigt werden, die bewirkt, daß B einfach zusammenhängend ist. Das soll in dieser Arbeit nicht geschehen.

woraus nach Taylorentwicklung der Winkelfunktionen bis zu Potenzen in k^4 genau über die Impedanz nach (3.1) P und Q folgen (W ist gleich Null). Z. B. führt $U_1 = U_0 = 1$ und $U_2 = 0$ zu

$$P = (H_1 + \frac{H_2}{2})A \,, Q = \frac{1}{12}\frac{2H_1^3 + H_2^3}{2H_1 + H_2}. \tag{6.5}$$

Weitere Ergebnisse sind in Bild A1.3 tabelliert. (Schlitzabstände wurden gleich gewählt).

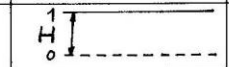
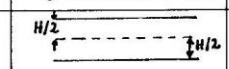
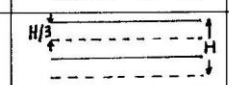
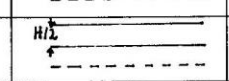
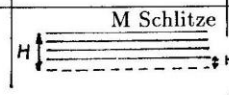
Nr.	Kondensatorgestalt	P	Q	η
1		$\frac{AH}{2}$	$\frac{H^2}{12} =: Q_1$	1
2		$\frac{AH}{2}$	$\frac{Q_1}{4}$	1
3		$\frac{AH}{2}$	$\frac{Q_1}{9}$	1
4		$\frac{3}{2} \cdot \frac{AH}{2}$	$\frac{Q_1}{4}$	$\frac{3}{2}$
5	M Schlitze 	$\frac{2M+1}{M+1} \cdot \frac{AH}{2}$	$\frac{Q_1}{(M+1)^2}$	$\frac{2M+1}{M+1}$

Bild A1.3: Tabelle einiger geschlitzter Flachkondensatoren

Die Tabelle macht deutlich: Durch Einfügen von M Leiterplatten mit dem Potential 1 kann die Kapazität C_0 des Kondensators Nr. 1 erhöht, maximal (für $M \rightarrow \infty$) verdoppelt werden, während der Ohmsche Widerstand S und der Verlustfaktor $\tan\delta$ wegen des kleiner werden Q stark abfallen gegen Null. Die Grenzfrequenz f_G nimmt wegen der mit M größer werdenden Fläche A_B, die das Potential 1 besitzt, zu.

Bemerkung 1:

Im Fall von Bild A1.2 ist $A_B = 3A$, da die innere Fläche doppelt zählt.

Bemerkung 2:

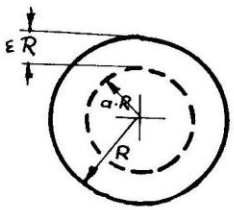
Die Ergebnisse der Tabelle sind durch Parallel- bzw. Hintereinanderschaltung von ungeschlitzten Flachkondensatoren (Kondensator Nr. 1 von Bild A1.3) erhaltbar: Z. B. erhält man Kondensator Nr. 4 durch Parallelschaltung von Kondensator Nr. 1 mit Plattenabstand H und Nr. 1 mit Plattenabstand H/2 .

Bemerkung 3:

Exakterweise müßte das oben angedeutete Anbohren der Leiterplatten in der Rechnung berücksichtigt werden, die bewirkt, daß B einfach zusammenhängend ist. Das soll in dieser Arbeit nicht geschehen.

6.2 Der ungeschlitzte und der geschlitzte KZK

Der letzte Abschnitt läßt uns die im Hauptteil der Arbeit erhaltenen Ergebnisse vom ungeschlitzten und geschlitzten KZK für a nahe 1 verstehen.



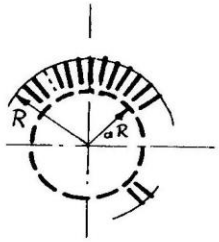


Bild A1.4: Ungeschlitzter KZK für $a \to 1$ **Bild A1.5:** Geschlitzter KZK

Der ungeschlitzter KZK: Sei $a = 1 - \epsilon$ mit $0 < \epsilon \ll 1$. Nach Abschnitt A11 (Bild A1.3, Nr. 1) ist er als flacher Kondensator mit der Fläche $2\pi RH$ und der Höhe ϵR auffaßbar (Bild A1.4). Danach ist $P_U \approx (1-a)\pi R^2 H$. Das gleiche Ergebnis erhält man aus (4.3) mittels Taylorentwicklung.

Den unendlich oft geschlitzten KZK kann man sich realisiert denken durch Einfügen von $M \to \infty$ kontaktierten Schlitzen (Potential 1) (Bild A1.5), die einen Abstand $h = 2\pi R/M$ voneinander haben. Die Schlitze sollten, um ein Durchschlagen zu vermeiden, nicht ganz bis zur Katode, die den Radius aR hat, durchgesägt sein. Ein einziger Schlitz davon sei auf Potential null. Das ändert kaum etwas am Gesamtfeld. Da Randeffekte vernachlässigbar sind, biegen wir den Kondensator in Gedanken auf und erhalten nach Bild A1.3, Kondensator Nr. 5: $P_G = Flaeche\ mal\ Hoehe = (1-a)RH \cdot (1+a)\pi R = (1-a^2)\pi R^2 H$, da die Fläche des Schlitzes (1-a)RH, die mittlere Höhe des Kreisrings $(2\pi aRH + 2\pi RH)/2 = (1+a)\pi RH$ ist.

Also gilt in Übereinstimmung mit (4.6) für

$$a \to 1 - 0 \text{ die Beziehung } \eta \to \frac{P_G}{P_U} = 2 - 0 \ .$$

7 Literatur

[1] Abramowitz, M.; Stegun, I. A.: Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover Publications, Inc. 1965

[2] Barthel, W.: Über ein Modell eines Elektrolytkondensators mit poröser Anode Wiss. Z. d. TU KMSt. **29** ('87) 175-179

[3] Barthel, W.: Numerische Lösungen für Modelle von Festkörperelektrolytkondensatoren mit poröser Anode. Wiss. Z. d. TU Chemnitz **31** ('89) 15-17

[4] Barthel, W.: Über ein Modell eines Elektrolytkondensators mit poröser Anode. Dissertation TH KMSt. 1986

[5] Barthel, W.:Über ein Modell eines Elektrolytkondensators mit poröser Anode. TH Magdeburg, 3. Tagung Industriemathematik, Berichte,Magdeburg 1981, S. 84-87

[6] Barthel,W.:Über ein Modell eines Elektrolytkondensators mit poröser Anode. Kammer der Technik (Arbeitsausschuß Kondensatoren) und VEB Kombinat El. Bauel. Teltow, 3. Tagung zum Thema Kondensatoren in Forschung und Praxis, KMSt. 1985, Veröffentlichungen S. 100-105

[7] Barthel, W.; Lanckau, E.: Über ein Modell eines Elektrolytkondensators mit poröser Anode. 5. Tagung der Abt. Mathem. u. Rechentechnik, Berichte, Köthen 1982, S. 1-6

[8] Böhme, L.; Laue, M.: Praktikumsbeleg VEB Kondensatorenwerk Freiberg 1977

[9] Frenkel, L. E.: On the Method of matched asymptotic expansions I, II, III Proc. Cambridge Phil. Soc. **65** 209 ff. ('69)

[10] Lagerstrom, P. A.: Matched Asymptotic Expansions, Springer New York Inc 1988

[11] Lanckau, E.; Langer, H.-D.: Ein mathematisches Modell eines Festkörpers mit poröser Anode Wiss. Z. TH Magdeburg **23** ('79) 563-565

[12] Langer, H.-D.: Festkörperkondensatoren Akademieverlag, Berlin 1982

[13] Meisel, K.: Lösung der Helmholtzgleichung mit Differenzenverfahren für einige Randwertprobleme. Diplomarbeit, TH KMSt., Sektion Mathematik 1985

[14] Müller, Fr.: Lösung der Helmholtzgleichung für den geschlitzten Kondensator mit Differenzenverfahren. Diplomarbeit, TH KMSt., Sektion Mathem. 1984

[15] Philips Bauelemente VALVO: Surface Mounted Devices: Kondensatoren Widerstände Datenbuch 1989

[16] Rint, Curt: Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker. Hüthig, Verlag Heidelberg 1981

[17] Samarski, A. A.: Theorie der Differenzenverfahren, Ak. Verlagsges. Geest und Portig, Leipzig 1984

[18] Windisch, G. : N-Matrizen in numerical analysis. Teubner-Texte zur Math., **115** BSG Teubner 1989